Analyse des équations aux dérivées partielles

25 janvier 2018

Examen – 3 heures

Les documents ne sont pas autorisés

Mise en garde / conseil / guide : le sujet est long, il est très probable que vous ne traiterez qu'une partie des questions. Les exercices 1 et 2 ne demandent pas de savoir grand chose mais vous font manipuler des objets qui vous sont étrangers. L'exercice 3 est peut-être le plus dur, c'est un joli résultat d'analyse convexe. Les 5 premières questions du quatrième et dernier exercice reposent sur votre connaissance et assimilation du cours, et sont simples de ce point de vue. Pour les questions de cours, #NoComment.

Notation. Dans tout l'énoncé, d est un entier plus grand que 1 et B_r est la boule ouverte de $\mathbf{R}^d$ de rayon r centrée en l'origine.

L'espace $C^\beta(\mathbf{R}^d)$. On introduit également un espace fonctionnel qui est utilisé dans les deux premiers exercices. Soit $\beta \in]0,2[$ et $\beta \neq 1$. Si $\beta \in]0,1[$, on dit que $u \in C^\beta(\mathbf{R}^d)$ si u est bornée et β-hölderienne sur $\mathbf{R}^d$, i.e.

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^d, |u(x) - u(y)| \le C|x-y|^\beta. \tag{1}$$

Dans ce cas, $\|u\|_{C^\beta} = \|u\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} + [u]_\beta$ où $[u]_\beta$ est la semi-norme hölderienne sur $\mathbf{R}^d$ de u, i.e. la plus petite constante C telle que (1) est vraie. Si $\beta \in]1,2[$, on dit que $u \in C^\beta(\mathbf{R}^d)$ si u et ∇u sont bornées et si ∇u est $(\beta-1)$-hölderienne sur $\mathbf{R}^d$. Dans ce cas, $\|u\|_{C^\beta} = \|u\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} + \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} + [\nabla u]_{\beta-1}$.

Exercice 1 (Laplacien fractionnaire)**.** Soit $\alpha \in]0,2[$. Pour toute fonction $u : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$, on considère

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u(x) = c_{d,\alpha} \int_{\mathbf{R}^d \setminus \{x\}} (u(x) - u(y)) \frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^{d+\alpha}}$$

pour $c_{d,\alpha}$ est une constante ne dépendant que de la dimension d et α.[1]

1. Montrer que pour $\alpha \in]0,1[$ et $u : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ borné et Lipschitz, alors

$$\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} \le C(\|u\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} + \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)})$$

   pour une constante C ne dépendant que de la dimension et de α. On pourra découper l'intégrale en deux bouts : l'un sur la boule $B_1(x)$ centrée en x et de rayon 1 et l'autre sur son complémentaire.

2. Est-ce le cas pour $\alpha \in [1,2[$? Justifiez votre réponse.

On remarque que pour $\alpha \in [1,2[$ et pour tous $r, R \in]0,+\infty[$ tels que $r \le R$, on a

$$\int_{r<|x-y|<R} \frac{x-y}{|x-y|^{d+\alpha}} \mathrm{d}y = 0.$$

1. $c_{d,\alpha} = \frac{2^\alpha \Gamma(\frac{d+\alpha}{2})}{\pi^{\frac{d}{2}} |\Gamma(-\frac{\alpha}{2})|}$ où Γ est la fonction d'Euler

On définit alors $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(x)$ pour $\alpha \in]1,2[$ sous la forme “faible” [2]

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(x) = c_{d,\alpha}\int_{\mathbf{R}^d\setminus\{x\}}(u(x)-u(y)-\nabla u(x)\cdot(x-y))\frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^{d+\alpha}} \tag{2}$$

et pour $\alpha = 1$, sous la forme “faible”

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(x) = c_{d,\alpha}\int_{\mathbf{R}^d\setminus\{x\}}(u(x)-u(y)-\nabla u(x)\cdot(x-y)\mathbf{1}_{B_1}(x-y))\frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^{d+\alpha}} \tag{3}$$

où $\mathbf{1}_{B_1}(z) = 1$ si $z \in B_1$ et 0 sinon.

3. Supposons $\alpha \in [1,2[$ et $u \in C^\beta(\mathbf{R}^d)$ pour un certain $\beta \in]\alpha,2[$. En utilisant la définition de $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(x)$ par (2) si $\alpha \in]1,2[$ et par (3) si $\alpha = 1$, montrer que
$$\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} \leq C\|u\|_{C^\beta(\mathbf{R}^d)}$$
pour une constante C ne dépendant que de la dimension d, de α et de β. On pourra raisonner comme dans la première question.

Exercice 2 (Principe du maximum fort pour le laplacien fractionnaire)**.** On considère de nouveau le laplacien fractionnaire pour $\alpha \in]0,2[$. Il a été justifié qu'il est bien défini dans l'exercice précédent, en un sens *ad hoc* pour $\alpha \geq 1$. Soit $u, v \in C^\beta(\mathbf{R}^d)$ telles que $u \leq v$

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u \leq 0 \quad \text{et} \quad (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}v \geq 0 \quad \text{dans } \mathbf{R}^d.$$

Montrer que si $u(\bar{x}) = v(\bar{x})$ pour un certain $\bar{x} \in \mathbf{R}^d$, alors $u \equiv v$ dans $\mathbf{R}^d$.

Exercice 3 (Une propriété du sous-différentiel de l'analyse convexe)**.** Soit $u : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ une fonction convexe. On sait que u est localement lipschitzienne et donc, par le théorème de Rademacher, presque partout différentiable. L'ensemble des points de différentiabilité de u est noté D. Le but de cet exercice est de montrer que le sous-différentiel $\partial u(x)$ coïncide avec l'enveloppe convexe de l'ensemble suivant

$$\partial^* u(x) = \{\lim_{n\to+\infty}\nabla u(x_n) : x_n \in D, x_n \to x\}.$$

1. Montrer que $\partial^* u(x)$ et son enveloppe convexe sont compacts.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbf{R}^d$,
$$u(z) = \sup\{\nabla u(x)\cdot(z-x) + u(x) : x \in D\}.$$
Indication : On pourra commencer par traiter le cas où $z \in D$.
3. En déduire que pour tout $z \in \mathbf{R}^d$,
$$u(z) = \sup\{p\cdot(z-x) + u(x) : x \in \mathbf{R}^d, p \in \partial^* u(x)\}.$$
Indication : On pourra remarquer qu'il suffit de montrer que u est plus grand que le membre de droite de l'équation précédente.

2. connue sous le nom de valeur principale dans la théorie des distributions

4. En déduire que
$$u(z) = \sup\{p \cdot (z - x) + u(x) : x \in \mathbf{R}^d, p \in \mathrm{co}(\partial^* u(x))\}.$$
5. En déduire que $\mathrm{co}(\partial^* u(x)) \subset \partial u(x)$.
6. Soit $q \in \partial u(x)$. En remarquant que la question 4 implique
$$q \cdot \xi \leq \sup\{p \cdot \xi : p \in \mathrm{co}(\partial^* u(x))\}$$
(le justifier), conclure que $q \in \mathrm{co}(\partial^* u(x))$.
Indication : on pourra raisonner par l'absurde et projeter un point sur un ensemble convexe et compact.

Exercice 4 (Solutions globales de l'équation eikonale)**.** On s'intéresse dans cet exercice aux solutions de
$$|Du| = 1 \text{ dans } \mathbf{R}^d. \tag{4}$$

1. Proposer des solutions classiques élémentaires de cette équation.
2. Montrer que les solutions de viscosité continues de (4) coïncident avec celles de
$$|Du|^2 = 1 \text{ dans } \mathbf{R}^d. \tag{5}$$
3. Montrer que la fonction $v(t, x) = u(x) - \frac{t}{2}$ est une solution de viscosité continue de
$$\partial_t v + \frac{1}{2}|Dv|^2 = 0 \quad \text{ dans }]0, +\infty[\times \mathbf{R}^d. \tag{6}$$
4. Rappeler la formule d'Oleinik-Lax pour (6) en fonction de $v_0(x) = v(0, x) = u(x)$.
5. En déduire que pour tout $t > 0$, $x \mapsto v(t, x)$ est $\frac{1}{2t}$-semi-concave dans $\mathbf{R}^d$.
6. En déduire que u est une fonction concave dans $\mathbf{R}^d$.
7. En utilisant la question 3 de l'exercice 3, en déduire que toute solution u de (4) est de la forme
$$u(x) = \inf_{\alpha \in A}(\xi_\alpha \cdot x + l_\alpha)$$
pour deux familles $(\xi_\alpha)_{\alpha \in A}$ et $(l_\alpha)_{\alpha \in A}$ de $\mathbf{R}^d$ et $\mathbf{R}$ respectivement, avec : $\forall \alpha \in A$, $|\xi_\alpha| = 1$.

Exercice 5 (Questions de cours)**.** On considère une équation uniformément elliptique de la forme $F(D^2 u) = f$ dans B_2.

1. Rappeler ce que veut dire "uniformément elliptique".
2. Énoncer l'inégalité de Harnack pour cette équation.
3. Énoncer l'inégalité de Harnack faible pour cette équation.
4. Montrer que l'inégalité de Harnack implique la régularité Hölder des solutions.