Analyse des EDP.
Éléments de correction
pour l'examen.

Exercice 1 (Laplacien fractionnaire)

1) – Soit $x \in \mathbb{R}^d$. $(-\Delta)^{\alpha/2} u(x) = I_1 + I_2$ avec

$$I_1 = \int_{B_1(x)} (u(x)-u(y)) \frac{dy}{|x-y|^{d+\alpha}} \quad \text{et} \quad I_2 = \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_1(x)} (u(x)-u(y)) \frac{dy}{|x-y|^{d+\alpha}}.$$

$$|I_1| \leq \|Du\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \int_{B_1} \frac{|z|}{|z|^{d+\alpha}} dz$$

$$|I_2| \leq 2\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_1} \frac{dz}{|z|^{d+\alpha}}$$

donc on obtient le résultat avec

$$C_d = \int_{B_1} \frac{dz}{|z|^{d-(1-\alpha)}} + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_1} \frac{dz}{|z|^{d+\alpha}}$$

2) – si $\alpha \in [1,2[$ le caractère lipschitz ne suffit plus à contrôler l'intégrale I_1. Par exemple :

$$(-\Delta)^{\alpha/2} |\cdot| (0) = - \int \frac{dy}{|y|^{d+(\alpha-1)}} = -\infty.$$

3) – Traitons d'abord le cas $\alpha \in]1,2[$. Dans ce cas,

$(-\Delta)^{\alpha/2} u(x) = I_1 + I_2$ avec $I_1 = \int_{B_1(x)} (u(x)-u(y) - Du(x)\cdot(x-y)) \frac{dy}{|x-y|^{d+\alpha}}$

et $I_2 = \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_1(x)} (u(x)-u(y) - Du(x)\cdot(x-y)) \frac{dy}{|x-y|^{d+\alpha}}$.

Or $u(x)-u(y) - Du(x)\cdot(x-y) = \int_0^1 Du(y+t(x-y))\cdot(x-y)\, dt - Du(x)\cdot(x-y)$

$$= \int_0^1 [Du(y+t(x-y)) - Du(x)]\cdot(x-y)\, dt$$

donc

$$|I_1| \leq \int_{B_1(x)} \left\{ \int_0^1 |t-1|^{\beta-1} [Du]_{\beta-1} dt \right\} \frac{|x-y|^\beta}{|x-y|^{d+\alpha}} dy$$

②

donc $|I_1| \leq [Du]_{\beta-1} \cdot \frac{1}{\beta} \int_{B_1} \frac{|z|^\beta}{|z|^{d+\alpha}} dz$

Pour $|I_2|$, on écrit :

$$|I_2| \leq 2\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \int_{|z|\geq 1} \frac{dz}{|z|^{d+\alpha}}$$

$$+ \|Du\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \int_{|z|\geq 1} \frac{dz}{|z|^{d+(\alpha-1)}}$$

Exercice 2. (Principe du maximum fort)

On pose $w(x) = u(x) - v(x)$

$(-\Delta)^{\alpha/2} w(x) = (-\Delta)^{\alpha/2} u(x) - (\Delta)^{\alpha/2} v(x) \leq 0$

Si $w(\bar{x}) = 0$ et $w \leq 0$ alors :

si $\alpha \in]0,1[$: $(-\Delta)^{\alpha/2} w(\bar{x}) = \int \frac{\overbrace{w(\bar{x}) - w(y)}^{\geq 0}}{|\bar{x}-y|^{d+\alpha}} dy \leq 0$

donc $w(y) = w(\bar{x}) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^d$.

si $\alpha \geq 1$, alors $\beta > 1$ donc w est C^1 en $\bar{x}$ donc $Dw(\bar{x}) = 0$

et on a encore :

$(-\Delta)^{\alpha/2} w(\bar{x}) = \int \frac{\overbrace{w(\bar{x}) - w(y)}^{\geq 0}}{|\bar{x}-y|^{d+1}} dy \leq 0$

donc $w \equiv 0$.

Exercice 4 (Solutions globales de l'éq$^\circ$ eikonale)

1. $u(x) = \xi . x - \ell$ pour $|\xi| = 1$.

2. Si ϕ est une fonction test touchant une fonction continue $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ par dessus en x, alors :

$$|D\phi|(x) \leq 1 \iff |D\phi|^2(x) \leq 1.$$

Il en est de même si ϕ touche u par dessous :

$$|D\phi(x)| \geq 1 \iff |D\phi(x)|^2 \geq 1.$$

3. On a, au sens des solutions de viscosité,

$$\partial_t v + \frac{1}{2}|Dv|^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}|Du|^2 = 0.$$

Plus précisément, si $\phi(t,x)$ touche v en (t_0,x_0) par dessus alors $\partial_t \phi(t_0,x_0) = -1/2$ et $\phi(t_0,x)$ touche $u(x)$ par dessus en x_0. En particulier, comme u est une solution de viscosité de $|Du|^2 = 1$, on a :

$$|D_x \phi(t_0,x_0)|^2 \leq 1.$$

donc $\partial_t \phi(t_0,x_0) + \frac{1}{2}|D_x \phi|^2(t_0,x_0) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$

On raisonne de même pour les sur-solutions.

4. $$v(t,x) = \inf_{y\in\mathbb{R}^d} \left\{ v_0(y) + \frac{1}{2t}|x-y|^2 \right\}$$

5. $$v(t,x) = \inf_{y\in\mathbb{R}^d} \left\{ v_0(y) + \frac{1}{2t}|x|^2 - \frac{x.y}{t} + \frac{1}{2t}|y|^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{2t}|x|^2 + \underbrace{\inf_{y\in\mathbb{R}^d} \left\{ v_0(y) + \frac{1}{2t}|y|^2 - \frac{x.y}{t} \right\}}_{\text{cette fonction est concave car c'est un infimum de fonctions affines.}}$$

donc

$$u(x) = v(t,x) + \frac{t}{2}$$

$$= \frac{1}{2t}|x|^2 + \left\{ v(t,x) - \frac{1}{2t}|x|^2 + t/2 \right\}$$

donc $u(x) - \frac{1}{2t}|x|^2$ est concave.

6. Par la question précédente, pour tout $t>0$, on a :

$\forall x,y \in \mathbb{R}^d$, $\forall \lambda \in [0,1]$,

$$u(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda u(x) + (1-\lambda)u(y) + \frac{\lambda(1-\lambda)}{2t}|x-y|^2$$

on conclut en faisant tendre $t \to +\infty$.

7] Par la question 2 de l'exercice 3 appliquée à $-u$, on a :

$$u(z) = \inf \{ p.(z-x) + u(z) : -p \in \partial(-u)(x) \}$$

or $\partial^*(-u) \subset S^{d-1}$ d'où le résultat.

$\boxed{\text{Exercice 3}}$ (Une propriété du sous-diff. convexe)

1°) — K est compact car fermé et borné : $(K = \omega(\partial^* u(x)))$.

* étant donné que f est localement lipschitzienne, $|\nabla u(y)| \leq C$ pour $y \in B_r(x)$ pour $r > 0$

Donc $\partial^* u(x) \subset B_C$ (donc il est borné)

Donc $K \subset B_C$ donc il est borné

* Par construction, $\partial^* u(x)$ est fermé donc compact.

donc K est aussi fermé et donc compact.

2°). Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et $y \in D$. On a :

$u(x) \geq \nabla u(y).(x-y) + u(y)$ par convexité.

Notons $\bar{u}(x) = \sup\limits_{y \in D} (\nabla u(y).(x-y) + u(y))$

On a donc $u(x) \geq \bar{u}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

- Si $x \in D$, alors $u(x) = \nabla u(x).(x-x) + u(x) \leq \bar{u}(x)$

donc pour tout $x \in D$, $u(x) \leq \bar{u}(x)$.

- Or u et $\bar{u}$ sont convexes donc continues sur $\mathbb{R}^d$.

Donc $u = \bar{u}$ car D dense dans $\mathbb{R}^d$.

3°). Soit maintenant $p \in \partial^* u(y)$.

$p = \lim\limits_{n \to +\infty} p_n$ avec $p_n = \nabla u(y_n)$, $y_n \to y$, $y_n \in D$.

$u(x) \geq p_n.(x-y_n) + u(y_n)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$.

Donc après passage à la limite :

$\forall p \in \partial^* u(y)$, $\boxed{(*) \quad u(x) \geq p.(x-y) + u(y)}$

4°). Si $p \in co(\partial^* u(y))$

alors il existe $t_1, \dots, t_{d+1} \in [0,1]$ tq $\sum_{i=1}^{d+1} t_i = 1$

et $p_i \in \partial^* u(y)$ tq $p = \sum_{i=1}^{d+1} t_i p_i$.

or par 3°),

$$u(x) \geq p_i.(x-y) + u(y)$$

donc $u(x) = \sum_{i=1}^{d+1} t_i u(x) \geq (\sum t_i p_i).(x-y) + u(y)$

$\geq p.(x-y) + u(y)$

d'où le résultat.

5°). On a précisément montré que $\forall p \in co(\partial^* u(x))$,

$p.(y-x) + u(x) \leq u(y)$

ie $p \in \partial u(x)$.

6°). • Soit $p \in co(\partial^* u(x-t\xi))$ pour $t>0$, $\xi \in \mathbb{R}^d$.

$p.(x-t\xi-x) + u(x) \leq u(x-t\xi)$.

Soit $q \in \partial u(x)$.

(*) $q.t\xi \leq u(x) - u(x+\xi) \leq p.t\xi$.

On peut ensuite trouver $t_n \to 0^+$, $p_n \in co(\partial^* u(x-t_n\xi))$

et p tq $p_n \to p \in co(\partial^* u(x))$ (même raisonnt que précédemment) et déduire de (*) que :

$q.\xi \leq p.\xi$, ce qui achève la démonstration.

• On projette $q \in \partial u(x)$ sur $co(\partial^* u(x))$ en $\pi(q)$.

On pose $\xi_q = q - \pi(q)$ et on trouve p_q tq

$$\begin{cases} q.\xi_q \leq p_q.\xi_q \\ p_q \in co(\partial^* u(x)) \end{cases}$$

Alors $|q-\pi(q)|^2 \leq |q-\pi(q)|^2 + (p_q - q).\xi_q$

$\leq (q-\pi(q)).(p_q - \pi(q)) \leq 0.$

Absurde !