Analyse des EDP.
Partiel du 9 novembre.
Eléments pour la correction.

Exercice 1

$\boxed{1}$. La fonction $u : (0,+\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par :

$$u(t,x) = \fint_{\partial B(x,t)} \{ g(y) + \nabla g(y).(y-x) + t h(y) \} dS(y)$$

vérifie l'équation des ondes et $u(0,x) = g(x)$, $\partial_t u(0,x) = h(x)$.

$\boxed{2}$. Si g & h ne dépendent pas de x_3, alors :

$$u(t,x) = \fint_{\partial B(x,t)} \Big\{ g(y_1,y_2) + \frac{\partial g}{\partial y_1}(y_1,y_2)(y_1-x_1) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(y_1,y_2)(y_2-x_2) + t h(y_1,y_2) \Big\} dS(y_1,y_2,y_3)$$

$$= \frac{1}{4t^2} \int_{\partial B(0,1)} \Big\{ g(x_1+t\xi_1, x_2+t\xi_2) + \frac{\partial g}{\partial y_1}(x_1+t\xi_1, x_2+t\xi_2)\xi_1 + \frac{\partial g}{\partial y_2}(x_1+t\xi_1, x_2+t\xi_2)\xi_2 + t h(x_1+t\xi_1, x_2+t\xi_2) \Big\} dS(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$$

Ainsi $u(t,x_1,x_2,x_3)$ est indépendant de x_3 : $\bar{u}(t,x_1,x_2)$

De plus, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x_1,x_2,x_3) = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}(t,x_1,x_2)$

$\Delta u(t,x_1,x_2,x_3) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(t,x_1,x_2,x_3) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_i^2}(t,x_1,x_2) = \Delta \bar{u}(t,x_1,x_2)$

donc $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = \Delta \bar{u}$ dans $(0,+\infty) \times \mathbb{R}^2$.

$\boxed{3}$. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ à bord C^∞ et $T > 0$.

Alors il existe au plus une solution $u \in C^2([0,T] \times \bar{\Omega})$

à
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u & \text{sur } (0,T) \times \Omega. \\ u = g & \text{sur } (0,T) \times \partial\Omega \cup \{0\} \times \Omega. \\ \partial_t u = h & \text{sur } \{0\} \times \Omega. \end{cases}$$

Démonstration. Par linéarité de l'équation, on se ramène à $g=0$ et $h=0$ et on montre que $u\equiv 0$. On pose :

$$e(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + |\nabla u|^2 \right\} dx$$

et on montre vu dans le cours que $e'(t)=0$ donc $\partial_t u = 0$, $\nabla u = 0$ donc $u \equiv 0$.

Exercice 2

1 Équations caractéristiques

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x} = D_p H(x,p) \\ \dot{p} = -D_x H(x,p) \\ \dot{z} = p\, D_p H(x,p) \end{cases}}$$

(les deux premières : Hamilton.)

2 Soit $X^* \in \mathcal{A}$ tq $I[X^*] \leq I[X]$ pour tout $X \in \mathcal{A}$.

Soit $Y \in \mathcal{C}^2([0,t], \mathbb{R}^d)$ tq $Y(0)=0$ et $Y(t)=0$.

Alors $X^* + \delta Y \in \mathcal{A}$ donc $I[X^*] \leq I[X^* + \delta Y]$

$$\int_0^t L(X^*(s) + \delta Y(s), \dot{X}^*(s) + \delta \dot{Y}(s))\, ds \geq \int_0^t L(X^*(s), \dot{X}^*(s))\, ds$$

donc $\delta \longmapsto \int_0^t L(X^*(s) + \delta Y(s), \dot{X}^*(s) + \delta \dot{Y}(s))\, ds$

est minimum en $\delta = 0$ donc :

$$\frac{d}{d\delta} \int_0^t L(X^*(s) + \delta Y(s), \dot{X}^*(s) + \delta \dot{Y}(s))\, ds = 0 \text{ en } \delta = 0$$

$$= \frac{d}{d\delta} \int_0^t \left(\frac{1}{2}|\dot{X}^*(s)|^2 + \delta \dot{X}^*(s)\cdot\dot{Y}(s) + \delta^2 \dot{Y}^2(s)\right)$$

$$+ \frac{d}{d\delta} \int_0^t V(X(s) + \delta Y(s))\, ds$$

$$\hookrightarrow \quad 0 = \int_0^t \dot{X}^*(s)\cdot\dot{Y}(s)\, ds + \int_0^t \nabla V(X(s))\, Y(s)\, ds$$

Remarque : $V \in C^1(\mathbb{R}^d) \Longrightarrow \delta \longmapsto \int_0^t V(X(s) + \delta Y(s))\, ds$ est dérivable, en particulier en $\delta = 0$ et par le théorème de dérivation sous le signe $\int$, sa dérivée est $\int_0^t \nabla V(X(s) + \delta Y(s)) . Y(s)\, ds$.

(on a bien la domination nécessaire)

On peut alors intégrer par parties la première intégrale :

$$\int_0^t \dot{x}^*(s)\,\dot{y}(s)\,ds = -\int_0^t \ddot{x}^*(s)\,y(s)\,ds.$$

car $y(0) = y(t) = 0$.

Ainsi $\int_0^t \{\ddot{x}^*(s) - \nabla V(x(s))\}\,y(s)\,ds = 0$.

ceci implique que $\ddot{x}^*(s) = \nabla V(x(s))$ pour tout $s \in (0,T)$.

or $D_p H(x,p) = p$

$D_x H(x,p) = \nabla V$

donc les équations de Hamilton sont : $\begin{cases} \dot{x} = p \\ \dot{p} = \nabla V(x). \end{cases}$

donc $(x^*, \dot{x}^*)$ les vérifient bien.

Exercice 3

$\boxed{1}$ - Soit $\phi \in C^1(\mathbb{R}^d)$ tq $f(y) \leq \phi(y)$ pour $y \in \mathbb{R}^d$.

$f(x_0) = \phi(x_0)$

Alors $-L|y-x_0| \leq f(y) - f(x_0) \leq \phi(y) - \phi(x_0)$.

donc $\dfrac{\phi(x_0+tn) - \phi(x_0)}{t} \geq -L$ pour tout $t \in \mathbb{R}, t>0$.

$t \to 0^+$: $\nabla\phi(x_0).n \geq -L$.

puis $n \to -n$ donne $\nabla\phi(x_0).n \leq L$

puis $\sup_{|n|=1} \nabla\phi(x_0).n \leq L$ donc le résultat.

$\boxed{2}$ (a). Soit $y_0 \in \overline{B}(x_0,1)$ tq $M = f(y_0) - f(x) - (L_1+\delta)|y_0 - x_0|$.

si $y_0 \in \partial B(x_0,1)$ alors $M = f(y_0) - f(x_0) - (L_1+\delta) \leq 0$.

si $y_0 = x_0$, alors $M = 0 \leq 0$.

si $y_0 \in B(x_0,1)\setminus\{x_0\}$, alors $(L_1+\delta)|y-x_0|$ est C^1

au voisinage de y_0 et donc (c) implique que

$(L_1+\delta) \leq L$ ce qui est impossible. Donc $M \leq 0$

Donc $f(y) - f(x) \leq (L_1+\delta)|y-x_0|$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$,
et tout $y \in B(x_0,1)$

donc* f est $(L_1+\delta)$-lipschitzienne pour tout $\delta>0$
donc f est L_1-lipschitzienne.

(b) Si $f_\varepsilon(y) \leq \varphi(y)$ pour y au voisinage de x_0
$f_\varepsilon(x_0) = \varphi(x_0)$
alors $f(y/\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}\varphi(y)$ pour y au vois de x_0.
et $f(z) \leq \frac{1}{\varepsilon}\varphi(\varepsilon z)$ pour z au vois de $\frac{x_0}{\varepsilon}$.
$f\left(\frac{x_0}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\varepsilon\cdot\frac{x_0}{\varepsilon}\right)$
donc $f(z) \leq \varphi^\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi(\varepsilon z)$ pour z au vois de $\frac{x_0}{\varepsilon}$
$f\left(\frac{x_0}{\varepsilon}\right) = \varphi^\varepsilon\left(\frac{x_0}{\varepsilon}\right)$
donc $\left|D\varphi^\varepsilon\left(\frac{x_0}{\varepsilon}\right)\right| \leq L$ i.e. $|\nabla\varphi(x_0)| \leq L$.

(c). Etant donné que $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est bornée, il existe M_0
tq $|f(y)| \leq M_0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^d$.
On choisit alors $\varepsilon>0$ tq $|f_\varepsilon(y)| \leq L/2$ pour tout $y \in \mathbb{R}^d$.
$(\varepsilon M_0 \leq L/2$ i.e. $\varepsilon \leq \frac{L}{2M_0})$.
Par (b), f_ε est L-lipschitzienne.
$\forall x,y \in \mathbb{R}^d \quad \left|\varepsilon f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \varepsilon f(y/\varepsilon)\right| \leq L|x-y|$
donc $\quad \left|f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - f(y/\varepsilon)\right| \leq L\left|\frac{x}{\varepsilon} - \frac{y}{\varepsilon}\right|$
donc (a) avec $\bar{x} = \frac{x}{\varepsilon}$, $\bar{y} = y/\varepsilon$.

$\boxed{3}$. Si $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est seulement bornée supérieurement,
alors $f_n = \max(f, -n)$ vérifie encore (C) pour tout $n \in \mathbb{N}$
et f_n est bornée. Donc $|f_n(y) - f_n(x)| \leq L|x-y|$
puis $n \to +\infty$ permet de conclure.

Exercice 4

$\boxed{1}$ (a) M_ε est atteint car $\bar B_1 \times \bar B_1$ est un compact et

$(x,y) \mapsto u(x) - v(y) - \frac{|x-y|^2}{2\varepsilon} - \alpha|x-z|^2$ est continue.

• $\varepsilon \mapsto M_\varepsilon$ est croissant et $M_\varepsilon \geq M_0$ donc

$\lim_{\varepsilon \to 0} M_\varepsilon$ existe et si on la note L, $L \geq M_0$.

$$M_{2\varepsilon} \geq u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) - \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{4\varepsilon} - \alpha|x_\varepsilon - z|^2$$
$$= M_\varepsilon + \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{4\varepsilon}$$

donc $\frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{4\varepsilon} \longrightarrow 0$ quand $\varepsilon \to 0^+$. (*)

• Si $(\bar x, \bar y)$ est un point d'accumulation de $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ alors : $\bar x = \bar y$ par (*)

et $M_0 \leq u(\bar x) - v(\bar x) - \alpha|\bar x - z|^2 \leq M_0$.

donc $\bar x = z$ donc $x_\varepsilon, y_\varepsilon \to z$ qd $\varepsilon \to 0^+$.

• Enfin, $0 < M_0 \leq M_\varepsilon = u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) - \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{2\varepsilon} - \alpha|x_\varepsilon - z|^2$

implique $\alpha|x_\varepsilon - z|^2 \leq u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$

et donc $\alpha|x_\varepsilon - z| \leq \sqrt{(\|u\|_\infty + \|v\|_\infty)\alpha}$.

(b) Comme $z \in B_1$, $x_\varepsilon, y_\varepsilon \notin \partial B_1$ pour ε assez petit et

on peut donc écrire les deux inégalités de viscosité.

$$\begin{cases} u(x_\varepsilon) + \left|\frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon} + 2\alpha(x_\varepsilon - z)\right| \leq 0. \\ v(y_\varepsilon) + \left|\frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon}\right| \geq 0. \end{cases}$$

Ce qui implique :

$$0 < M_0 \leq u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) \leq 2\alpha|x_\varepsilon - z| \leq 2\sqrt{(\|u\|_\infty + \|v\|_\infty)\alpha}$$

ce qui est absurde pour α petit.

2. (a) Pour cette pénalisation, on doit utiliser la continuité de u & v pour obtenir que $x_\varepsilon \notin \partial B_1$.

On montre que $\frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon} + \alpha z \longrightarrow 0$ quand $\varepsilon \to 0^+$. $\boxed{(**)}$

$$\begin{cases} u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) - \frac{1}{2}\left|\frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon} + \alpha z\right|^2 - \alpha|x_\varepsilon - z|^2 \\ \geq u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon - \alpha\varepsilon z) \end{cases}$$

donc $\frac{1}{2}\left|\frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon} + \alpha z\right|^2 + \alpha|x_\varepsilon - z|^2 \longrightarrow 0$ (***)

quand $\varepsilon \to 0^+$.

donc $x_\varepsilon \to z$, $y_\varepsilon \to z$ et (**) est vraie.

. (**) implique que $x_\varepsilon = y_\varepsilon - \alpha\varepsilon(1+o(1))z$

$$|x_\varepsilon|^2 = |y_\varepsilon|^2 + \alpha^2\varepsilon^2(1+o(1)) - 2\alpha\varepsilon(1+o(1))\, z\cdot y_\varepsilon$$
$$\leq 1 + \alpha\varepsilon\Big\{\underbrace{(\alpha\varepsilon)(1+o(1)) - 2(1+o(1))\, z\cdot y_\varepsilon}_{\to -2 \text{ quand } \varepsilon \to 0^+}\Big\}$$

donc $|x_\varepsilon|^2 < 1$ pour ε assez petit.

(b) On écrit les deux inégalités de viscosité :

$$u(x_\varepsilon) + \left|\frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon^2} + \frac{\alpha}{\varepsilon} z + 2\alpha(x_\varepsilon - z)\right| \leq 0.$$
$$v(y_\varepsilon) + \left|\frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon^2} + \frac{\alpha}{\varepsilon} z\right| \geq 0.$$

donc
$$u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) \leq 2\alpha|x_\varepsilon - z|$$

En utilisant (***) et la continuité de u & v, on a :

$M_\delta = u(z) - v(z) \leq 0$

ce qui est absurde.