Analyse des équations aux dérivées partielles

9 novembre 2017

Partiel – 2 heures

Les documents ne sont pas autorisés

Exercice 1 (Équation des ondes en dimension 2)**.** On considère l'équation des ondes en dimension 3 (dans tout l'espace),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u \quad \text{pour } t > 0, x \in \mathbf{R}^3$$

avec comme conditions initiales

$$\begin{cases} u(0,x) = g(x), \\ \partial_t u(0,x) = h(x) \end{cases} \qquad \text{pour } x \in \mathbf{R}^3$$

pour des fonctions $g, h \in C^2(\mathbf{R}^3)$. Pour $x \in \mathbf{R}^3$, on note $x = (x_1, x_2, x_3)$.

1. Rappeler la formule de Kirchoff.
2. On suppose que g et h ne dépendent pas de la variable $x_3 \in \mathbf{R}$. Montrer alors que la formule de Kirchoff définit une fonction u qui ne dépend aussi que de x_1 et x_2 et vérifie l'équation des ondes en dimension 2.
3. Énoncer un résultat d'unicité et montrer-le.
4. Le principe de Huyghens affirme que la solution u de l'équation des ondes en dimension 3 ne dépend que de g et h au voisinage de la sphère de rayon t centrée en x. Que devient-il en dimension 2 ?

Exercice 2 (Méthode des caractéristiques et équations de Hamilton)**.** Cet exercice se propose de montrer que les équations de Hamilton interviennent dans un problème de calcul des variations.

1. Écrire les équations caractéristiques associées à l'équation de Hamilton-Jacobi $H(x, \nabla u) = 0$ dans $\mathbf{R}^d$ et rappeler ce que sont les équations de Hamilton.
2. On considère le cas $H(x,p) = \frac{1}{2}|p|^2 - V(x)$ pour une fonction $V \in C^1(\mathbf{R}^d)$. On définit alors $L(x,p) = \frac{1}{2}|p|^2 + V(x)$ et on considère la fonctionnelle suivante

$$I[X] = \int_0^t L(X(s), \dot{X}(s))\mathrm{d}s$$

pour $X \in \mathcal{A} = \{X \in C^2([0,t], \mathbf{R}^d), X(0) = x, X(t) = y\}$. On rappelle que $\dot{X}$ est simplement la dérivée de $s \mapsto X(s)$. En s'inspirant de la caractérisation variationnelle de la solution du problème de Poisson vu en cours (équation d'Euler-Lagrange), montrer que si $X^* \in \mathcal{A}$ minimise I parmi les éléments de $\mathcal{A}$, alors $(X^*(s), \dot{X}^*(s))$ vérifie les équations de Hamilton.

Exercice 3 (Fonctions lipschitziennes)**.** On considère une fonction $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ bornée. Le but de cet exercice est de montrer que f est L-lipschitzienne, c'est-à-dire vérifie

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^d, \qquad |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \tag{Lip}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} f \text{ est semi-continue supérieurement sur } \mathbf{R}^d \\ \text{pour toute fonction test } \phi \in C^1 \text{ touchant (localement) } f \text{ par dessus en } x_0 \in \mathbf{R}^d : |\nabla\phi(x_0)| \leq L. \end{cases} \tag{C}$$

1. Suppposons (Lip). Montrer que (C) est une condition nécessaire. On pourra d'abord montrer que pour tout vecteur n de norme 1, on a $\nabla\phi(x_0) \cdot n \geq -L$.
2. On va maintenant montrer que (C) est une condition suffisante. Supposons (C) et montrons (Lip).

(a) On fixe $x_0 \in \mathbf{R}^d$ et $\delta > 0$ et on considère

$$M = \sup_{|y-x_0|\leq 1} f(y) - f(x_0) - (L_1+\delta)|y-x_0|$$

pour $L_1 = \max(L, 2\|f\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)})$. Montrer que $M \leq 0$ et donc que f est L_1-Lipschitzienne.

(b) Remarquer que pour tout $\epsilon > 0$, $f_\epsilon(x) = \epsilon f(x/\epsilon)$ vérifie encore le critère des fonctions tests : toute fonction test ϕ touchant f_ϵ par dessus en $x_0 \in \mathbf{R}^d$: $|\nabla\phi(x_0)| \leq L$.

(c) En déduire que f est L-Lipschitzienne.

3. Pensez-vous que cette caractérisation des fonctions Lipschitziennes est encore vraie pour les fonctions $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ uniquement bornées supérieurement ?

Exercice 4 (Unicité pour les contraintes d'état)**.** On considère l'équation

$$u + |Du| = 0 \text{ sur } B_1 \tag{E}$$

où B_1 est la boule unité ouverte de $\mathbf{R}^d$ ($d \geq 1$). On notera $\bar{B}_1$ la boule unité fermée.

— On dit que v est une sur-solution de (E) au sens des contraintes d'état si v est semi-continue inférieurement sur $\bar{B}_1$ (la boule fermée) et si pour toute fonction-test $\phi \in C^1(\bar{B}_1)$ qui touche u pas dessous en $x_0 \in \bar{B}_1$, on a $v(x_0) + |D\phi(x_0)| \geq 0$. On insiste sur le fait que x_0 peut donc être au bord de la boule.

— Une fonction u est une sous-solution de (E) au sens des contraintes d'état si u est semi-continue supérieurement sur $\bar{B}_1$ et si pour toute fonction test $\phi \in C^1(B_1)$ qui touche v par dessus en $x_0 \in B_1$, on a $v(x_0) + |D\phi(x_0)| \leq 0$. Ici, x_0 n'est pas sur le bord de la boule.

— Une fonction u est une solution de (E) au sens des contraintes d'état si c'est à la fois une sur-solution et une sous-solution de (E) au sens des contraintes d'état.

Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe au plus une solution de viscosité de (E) au sens des contraintes d'état.

On considère pour cela deux solutions u et v de (E) au sens des contraintes d'état, on définit $M_0 = \max_{x\in\bar{B}_1}(u(x) - v(x))$ et on suppose par l'absurde que $M_0 > 0$.

1. Supposons que le maximum M_0 est atteint en $z \in B_1$. On considère

$$M_\epsilon = \max_{x,y\in\bar{B}_1}\left(u(x) - v(y) - \frac{|x-y|^2}{2\epsilon} - \alpha|x-z|^2\right).$$

(a) Montrer que si M_ϵ est atteint en x_ϵ, y_ϵ alors $x_\epsilon \to z$ et $y_\epsilon \to z$ quand $\epsilon \to 0$ (avec α fixé) et

$$\alpha|x_\epsilon - z| \leq \sqrt{(\|u\|_\infty + \|v\|_\infty)\alpha}.$$

(b) Obtenir une contradiction en faisant tendre ϵ vers 0 et en prenant α assez petit.

2. Supposons maintenant que le supremum est atteint en $z \in \partial B_1$. On considère

$$M_\epsilon = \max_{x,y\in\bar{B}_1}\left(u(x) - v(y) - \frac{1}{2}\left|\frac{x-y}{\epsilon} + \alpha z\right|^2 - \alpha|x-z|^2\right).$$

(a) Montrer que si ce maximum est atteint en (x_ϵ, y_ϵ) alors nécessairement x_ϵ n'est pas sur le bord de la boule.

(b) En utilisant cette information, obtenir une contradiction dans ce cas-là et conclure.