C. R. Acad. Sci. Paris, t. 326, Série I, p. 1275-1278, 1998
Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*

Les fonctions d'appui de la jacobienne généralisée de Clarke et de son enveloppe plénière

Jean-Baptiste HIRIART-URRUTY, Cyril IMBERT

UFR de mathématique, d'informatique et de gestion, Université Paul-Sabatier, Toulouse III, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex, France

(Reçu le 26 mars 1998, accepté le 5 mai 1998)

Résumé. Étant donné $F : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ localement lipschitzienne et $\mathcal{J}F(\bar{x})$ sa jacobienne généralisée (au sens de Clarke) en $\bar{x} \in \mathcal{O}$, nous déterminons la fonction d'appui de $\mathcal{J}F(\bar{x})$, c'est-à-dire : $\max\{ \langle\langle X, M \rangle\rangle \mid X \in \mathcal{J}F(\bar{x})\}$ pour tout $M \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. L'enveloppe plénière de $\mathcal{J}F(\bar{x})$ est définie par $\{X \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \mid Xu \in \mathcal{J}F(\bar{x})u$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n\}$; c'est un convexe compact dont nous déterminons également la fonction d'appui. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

The support functions of Clarke's generalized Jacobian matrix and of its plenary hull

Abstract. *Given a locally Lipschitz mapping $F : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ and its generalized jacobian matrix $\mathcal{J}F(\bar{x})$ at $\bar{x} \in \mathcal{O}$ (in Clarke's sense), we determine the support fonction of $\mathcal{J}F(\bar{x})$, that is: $\max\{ \langle\langle X, M \rangle\rangle \mid X \in \mathcal{J}F(\bar{x})\}$ for all $M \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. The plenary hull of $\mathcal{J}F(\bar{x})$ is defined as $\{X \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \mid Xu \in \mathcal{J}F(\bar{x})u$ for all $u \in \mathbb{R}^n\}$; it is a compact and convex set whose support function is also determined.* © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

1. Notations et préliminaires

1.1. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ celui dans l'espace matriciel $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire $\langle\langle A, B \rangle\rangle := \mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}}B)$). Si $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $F = (f_1, \ldots, f_m) : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ une fonction (vectorielle) localement lipschitzienne sur $\mathcal{O}$, la *(matrice) jacobienne généralisée au sens de Clarke* de F en $\overline{x}$ est l'ensemble convexe compact non vide de $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ défini comme suit (*voir* [1]) :

$$\mathcal{J}F(\overline{x}) := \mathrm{co}\{\lim \mathrm{J}F(x_k) \ : \ x_k \to \overline{x},\ x_k \in \mathrm{D}_F\}, \tag{1}$$

où D_F désigne l'ensemble des points de $\mathcal{O}$ en lesquels F est différentiable, et $\mathrm{J}F(x_k)$ est la matrice jacobienne de F en x_k. Lorsqu'il s'agit d'une fonction à valeurs réelles $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, le *gradient (ou sous-différentiel) généralisé* au sens de Clarke de f en $\overline{x} \in \mathcal{O}$ est le convexe compact non vide de $\mathbb{R}^n$ défini comme :

$$\partial f(\overline{x}) = \mathrm{co}\{\lim \nabla f(x_k) \ : \ x_k \to \overline{x},\ x_k \in \mathrm{D}_f\}, \tag{2}$$

Note présentée par Haïm BRÉZIS.

où $\nabla f(x_k)$ désigne le vecteur gradient de f en x_k. Cet objet ∂f a été énormément étudié, généralisé, et utilisé depuis son introduction par Clarke en 1973. Il n'en est pas de même de $\mathcal{J}F(\bar{x})$ (pour les fonctions à valeurs *vectorielles* F) et l'une des raisons est le manque d'une formule explicite de la fonction d'appui de $\mathcal{J}F(\bar{x})$, analogue à (ou généralisant) celle connue pour $\partial f(\overline{x})$ depuis son introduction il y a vingt cinq ans. L'objet $\mathcal{J}F(\bar{x})$ pour $F = (f_1, \ldots, f_m)$ est plus précis que (i.e., contenu dans)

$$\partial f_1(\overline{x}) \times \cdots \times \partial f_m(\overline{x}) := \{X \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \ : \ \text{la } j\text{-ème ligne de X est dans } \partial f_j(\overline{x}) \text{ pour tout } j = 1, \ldots, m\}, \tag{3}$$

car il prend en compte l'interdépendance éventuelle des fonctions-composantes f_i. Sont connus à propos de $\mathcal{J}F(\bar{x})$: le fait (démontré par Warga, Yomdin, Fabian et Preiss) que sa définition est « insensible aux ensembles de mesure nulle » (i.e., on ne modifie pas $\mathcal{J}F(\bar{x})$ en imposant dans (1) que $x_k \notin N_0$, où N_0 est de mesure de Lebesgue nulle) ; la fonction d'appui de ses *images* $\mathcal{J}F(\bar{x})u$, $u \in \mathbb{R}^n$; son rôle dans des résultats d'Analyse non-différentiable comme le théorème des fonctions inverses (*voir* [1], [3]).

1.2. Soit $\mathcal{A} \subset \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. La connaissance de $\mathcal{A}u$, $u \in \mathbb{R}^n$, ne détermine pas $\mathcal{A}$, ce qui a conduit Halkin et Sweetser ([7], section 3) à proposer la notion d'ensemble *plein* : $\mathcal{A} \subset \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est dit plein s'il contient tout $B \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tel que $Bu \in \mathcal{A}u$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$. L'*enveloppe plénière* de $\mathcal{A}$, notée $\mathrm{plen}\mathcal{A}$, est le plus petit ensemble plein contenant $\mathcal{A}$. Dans notre contexte, $\mathcal{J}F(\bar{x})$ n'est pas toujours plein, excepté lorsque m ou n vaut 1 ; donc $\mathrm{plen}\mathcal{J}F(\bar{x})$ est un nouvel objet, convexe et compact, intermédiaire entre $\mathcal{J}F(\bar{x})$ et $\partial f_1(\overline{x}) \times \cdots \times \partial f_m(\overline{x})$, dont les images (de $u \in \mathbb{R}^n$) sont, néanmoins, les mêmes que celles de $\mathcal{J}F(\bar{x})$.

2. La fonction d'appui de la jacobienne généralisée

Le résultat principal de ce paragraphe concerne l'évaluation de

$$\sigma_{\mathcal{J}F(\bar{x})}(M) := \max\{ \langle\!\langle X, M \rangle\!\rangle \mid X \in \mathcal{J}F(\bar{x})\}$$

pour tout $M \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

THÉORÈME 2.1. – *Soit $F : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ localement lipschitzienne et $M \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. On désigne par $P_\epsilon(x)$ l'hypercube de $\mathbb{R}^n$ de sommet x dont les arêtes issues de x sont les éléments de la base canonique, i.e.,*

$$P_\epsilon(x) := \{x + \epsilon t_1 e_1 + \cdots + \epsilon t_n e_n \ : \ t_i \in [0,1] \text{ pour tout } i\},$$

$\mathrm{fr}\, P_\epsilon(x)$ *sa frontière,* $\mathrm{n}(y)$ *le vecteur normal sortant en $y \in P_\epsilon(x)$, et σ la mesure (de surface) de Lebesgue sur* $\mathrm{fr}\, P_\epsilon(x)$*, c'est-à-dire sur les faces de l'hypercube.*

Alors, pour $n \geq 2$:

$$\sigma_{\mathcal{J}F(\overline{x})}(M) = \limsup_{x \to \overline{x}, \varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{fr P_\varepsilon(x)} \langle F(y), M\mathrm{n}(y) \rangle \mathrm{d}\sigma(y). \tag{4}$$

Dans le cas où $n = 1$:

$$\sigma_{\mathcal{J}F(\bar{x})}(v) = (\langle v, F \rangle)^\circ(\overline{x}; 1), \tag{5}$$

où $(\langle v, F \rangle)^\circ$ désigne la dérivée directionnelle généralisée (au sens de Clarke) de la fonction « scalarisée » $\langle v, F \rangle$.

La démonstration se fait en trois étapes :

(1) On se ramène à $m = n$ et $M = \mathrm{I}_n$ (matrice identité) en posant $G = M^{\mathrm{T}} F$; alors $\sigma_{\mathcal{J}F(\bar{x})}(M) = \sigma_{\mathcal{J}G(\bar{x})}(\mathrm{I}_n)$.

(2) On démontre (c'est l'étape-clé) :

$$\sigma_{\mathcal{J}G(\bar{x})}(\mathrm{I}_n) = \limsup_{x \to \bar{x}, \varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{P_\varepsilon(x)} \operatorname{div} G(y) \mathrm{d}\mu(y), \tag{6}$$

où div désigne la divergence et μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

(3) On applique la formule de Green–Stokes à la fonction localement lipschitzienne G sur l'hypercube $P_\epsilon(x)$, pour $n \geq 2$.

Remarques. – 1. La frontière de l'hypercube $P_\epsilon(x)$ est la réunion de $2n$ faces que l'on paramètre par $[0,1]^{n-1}$. Si l'on note $\widehat{t_i} = t_1 e_1 + \cdots + t_{n-1} e_n$, somme dans laquelle n'intervient pas e_i, alors $F_i^+ := \{x + \epsilon e_i + \epsilon \widehat{t_i} : (t_1, \ldots, t_{n-1}) \in [0,1]^{n-1}\}$ et $F_i^- := \{x + \epsilon \widehat{t_i} : (t_1, \ldots, t_{n-1}) \in [0,1]^{n-1}\}$ sont deux faces dont les vecteurs normaux sortant sont e_i et $-e_i$ respectivement. On décrit ainsi les $2n$ faces de $P_\epsilon(x)$ quand i parcourt $\{1, \ldots, n\}$. Par changement de variables dans (4) on obtient :

$$\sigma_{\mathcal{J}f(x_0)}(M) = \limsup_{x \to x_0, \varepsilon \to 0^+} \sum_{i=1}^{n} \int_{[0,1]^{n-1}} \frac{\langle f(x + \epsilon e_i + \epsilon \widehat{t_i}) - f(x + \epsilon \widehat{t_i}), M e_i \rangle}{\epsilon} \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_{n-1}. \tag{7}$$

Cette forme technique ne fait intervenir que des quotients différentiels et nous permet de travailler plus facilement avec la fonction d'appui.

2. Lorsque $n = 1$, l'intégrale de surface disparaît dans (7), ce qui conduit à (5), résultat qui avait déjà été établi dans [4].

Le théorème 2.1 permet d'accéder à la règle de composition pour les jacobiennes généralisées (la plus générale) $\mathcal{J}(F_1 \circ F_2)(\bar{x}) \subset \operatorname{co}\{\mathcal{J}F_1(F_2(\bar{x})) \circ \mathcal{J}F_2(\bar{x})\}$; à notre connaissance, cette règle a été établie dans toute sa généralité uniquement dans [2].

3. La fonction d'appui de l'enveloppe plénière de la jacobienne généralisée

Pour $u \in \mathbb{R}^n$ et $v \in \mathbb{R}^m$, on note $u \otimes v$ la matrice (de rang 1) représentant l'application linéaire $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle u, x \rangle v$ dans les bases canoniques. La fonction d'appui de $\mathcal{J}F(\bar{x})$ ou de $\mathrm{plen}\mathcal{J}F(\bar{x})$ dans les directions particulières $M = u \otimes v$ est connue depuis [4] : $\sigma_{\mathcal{J}F(\bar{x})}(u \otimes v) = (\langle v, F \rangle)^\circ(\bar{x}; u)$; le résultat qui suit généralise cette expression au cas de M quelconque.

THÉORÈME 3.1. – *Sous les mêmes hypothèses que celles du théorème* 2.1 *:*

$$\sigma_{\mathrm{plen}\mathcal{J}F(\bar{x})}(M) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{k} (\langle v_i, F \rangle)^\circ(\bar{x}; u_i) \ : \ \sum_{i=1}^{k} u_i \otimes v_i = M \right\}. \tag{8}$$

Un corollaire immédiat de ce théorème est : si on considère $u, u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^n$, $v, v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^m$ tels que $u \otimes v = u_1 \otimes v_1 + \cdots + u_k \otimes v_k$, alors

$$(\langle v, f \rangle)^\circ(x_0; u) \ \leq \ (\langle v_1, f \rangle)^\circ(x_0; u_1) + \cdots + (\langle v_k, f \rangle)^\circ(x_0; u_k), \tag{9}$$

ce qui constitue le résultat principal (théorème 7) de [6]. Par ailleurs, les cas où l'infimum est atteint dans l'expression (8) sont élucidés dans [5].

Références bibliographiques

[1] Clarke F.H., On the inverse function theorem, Pac. J. Math. 64 (1976) 97–102.
[2] Clarke F.H., Analyse non lisse et optimisation, Cours de 3e cycle, École doctorale de mathématiques, Université Paul-Sabatier, 1993–1994.
[3] Clarke F.H., Optimization and Nonsmooth Analysis, Wiley, New York, 1983.
[4] Hiriart-Urruty J.-B., Characterizations of the plenary hull of the generalized Jacobian matrix, Math. Prog. Study 17 (1982) 1–12.
[5] Imbert C., Les fonctions d'appui de la jacobienne généralisée de Clarke et de son enveloppe plénière, Technical report, LAO 98-02, Laboratoire « Approximation et Optimisation », Université-Paul-Sabatier, Toulouse, 1998.
[6] Páles Zs., Zeidan V., Generalized Hessian for $C^{1,1}$ functions in infinite-dimensional normed spaces, Math. Prog. 74 (1996) 59–78.
[7] Sweetser T.H., A minimal set-valued strong derivative for vector-valued Lipschitz fonctions, J. Optim. Th. Appl. 23 (4) (1977) 549–562.