Solutions de viscosité et solutions variationnelles pour EDP non-linéaires

Jérôme Droniou [*] et Cyril Imbert [†]

octobre 2012

*. Département de Mathématiques, UMR CNRS 5149, Université Montpellier II, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5, France, droniou@math.univ-montp2.fr

†. CNRS, LAMA, université Paris-Est Créteil, Campus centre, bâtiment P4, 61 avenue du général de Gaulle, 94010 Créteil, France, cyril.imbert@u-pec.fr

Table des matières

Introduction Générale

Ce polycopié correspond à des cours de DEA (les anciens M2) donnés à l'Université Montpellier II en 2002-2003 et 2003-2004. Les cours comprenaient deux parties séparées, qui correspondent aux deux parties de ce document (en 2002-2003, quelques heures de cours avaient été réservés pour étudier l'équivalence, sur des cas simples, entre solutions de viscosité et solutions variationnelles).

Partie I. Dans la partie qui concerne les solutions variationnelles, l'étude des équations elliptiques a principalement pour but de montrer diverses manières d'obtenir des estimations *a posteriori* ou *a priori* sur les solutions de ces équations ; les techniques de passage à la limite (par exemple dans le cas de second membres mesures) qui permettent de transformer ces estimations *a priori* en existence de solutions sont volontairement laissées de côté ou faites dans des cas simplifiés. En 2002-2003, une deuxième partie du cours sur les solutions variationnelles était dédiée aux problèmes paraboliques non-linéaires (principalement à l'existence de solutions) ; cette partie a été remplacée, en 2003-2004, par l'étude des lois de conservation scalaires et c'est ce qui figure dans ce polycopié. L'étude de l'approximation parabolique de ces lois de conservation, utilisée pour prouver l'existence d'une solution entropique, est faite d'une manière peu courante et, il faut bien l'avouer, pas des plus efficaces par rapport à ce qui peut être dit en général sur les équations paraboliques semi-linéaires ; cependant, elle a l'avantage d'être auto-consistante (nous établissons le plus rapidement possible tout ce dont nous avons besoin concernant cette approximation parabolique, sans supposer que le lecteur connait quoi que ce soit à son sujet) et de se généraliser à d'autres types d'équations.

Partie II. La seconde partie traite des solutions de viscosité. Parce que les solutions de viscosité sont toujours introduites pour résoudre un problème non-linéaire que l'on ne sait pas attaquer autrement, nous avons essayé de trouver un juste équilibre entre la théorie générale et les applications. Le premier chapitre présente essentiellement la définition et les propriétés de stabilité des solutions de viscosité. Nous avons choisi de présenter les résultats en reportant systématiquement en annexe les résultats d'analyse non-lisse sur lesquels les démonstrations s'appuient. Ceci permet de cerner ce qui relève purement de l'analyse des fonctions semi-continues et ce qui relève des EDP. Le second chapitre traite du mouvement de fronts par courbure moyenne. Il s'agit essentiellement de prouver l'existence et l'unicité de la solution d'une équation quasi-linéaire singulière et dégénérée et de faire l'aller et le retour entre le problème géométrique de départ et l'EDP. A la fin des deux chapitres ainsi qu'à la fin de la seconde annexe, nous avons donné quelques références bibliographiques et fait quelques commentaires plus détaillés sur les résultats présentés.

Notations générales. On notera $X \cdot Y$ ou $\langle X, Y \rangle$ le produit scalaire euclidien de deux vecteurs X et Y de $\mathbb{R}^N$ et $|\cdot|$ la norme associée.
Lorsque l'on a une fonction u dépendant de $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^N$, on notera sa dérivée temporelle $\partial_t u$, ses dérivées spatiales premières $\partial_i u$ $(i = 1, \ldots, N)$ et les dérivées spatiales secondes $\partial_{ij} u$ $(i, j = 1, \ldots, N)$. ∇u et $D^2 u$ représenteront respectivement le gradient et la Hessienne de u par rapport à ses dérivées spatiales uniquement ; de même, div et Δ sont les opérateurs de divergence et laplacien par rapport à la variable d'espace.
$\mathcal{S}_N$ représente l'espace des matrices symétriques de taille N sur $\mathbb{R}$. Il est muni de l'ordre partiel suivant : $A \leq B$ si toutes les valeurs propres de $B - A$ sont positives (ce qui revient à demander que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, $A\xi \cdot \xi \leq B\xi \cdot \xi$).

Première partie

Solutions variationnelles

Chapitre 1

Rappels sur les espaces de Sobolev

Nous rappelons brièvement ici des résultats, concernant les espaces de Sobolev, essentiels pour la suite.

1.1 Généralités

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et $1 \leq p \leq \infty$. L'espace $W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D_i u \in L^p(\Omega)\}$ ($D_i u$ est la dérivée distribution par rapport à la i-ème variable) muni de la norme $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ est un espace de Banach, séparable réflexif lorsque $1 < p < \infty$. L'ensemble des fonctions C^∞ à support compact dans Ω est noté $\mathcal{D}(\Omega)$; c'est l'ensemble des fonctions-test. On note $W_0^{1,p}(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 1.1 (Inégalité de Poincaré) *Pour toute fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \operatorname{diam}(\Omega)\ \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Ceci permet de munir $W_0^{1,p}$ d'une norme équivalente à sa norme usuelle : $u \to \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$. Le dual topologique de cet espace est noté $W^{-1,p'}(\Omega)$ où p' est l'exposant conjugué de p (i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$).
Dans le cas $p = 2$, on note $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$, $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega) = W^{-1,2}(\Omega)$. Notons que la norme définie sur $H^1(\Omega)$ n'est pas une norme issue d'un produit scalaire, bien que cet espace puisse être très facilement normé (de manière équivalente) de sorte à en faire un Hilbert.
Nous utiliserons très souvent dans nos raisonnements sur les équations elliptiques le théorème de compacité de Rellich-Kondrachov et l'injection de Sobolev pour $p < N$.

Théorème 1.2 (Rellich-Kondrachov) *Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $1 < p < \infty$ alors $W_0^{1,p}(\Omega)$ s'injecte compactement dans $L^p(\Omega)$: de toute suite bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, on peut extraire une suite qui converge fortement dans $L^p(\Omega)$ et faiblement dans $W^{1,p}(\Omega)$.*

La convergence faible de la sous-suite vient bien sûr de la réflexivité de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 1.3 (Injection de Sobolev — cas $p < N$) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leq p < N$. Alors $W_0^{1,p}(\Omega)$ s'injecte continuement dans $L^{\frac{Np}{N-p}}(\Omega)$.*

Enfin, une conséquence du théorème de Vitali sur les convergences dans les espaces de Lebesgue.

Théorème 1.4 (Compacité L^p-L^q) *Soit Ω un ensemble de mesure finie et $1 \leq q < p \leq \infty$. Si $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite qui converge presque partout vers u et qui est bornée dans $L^p(\Omega)$, alors $u_n \to u$ dans $L^q(\Omega)$.*

1.2 Théorème de Stampacchia sur la composition

Pour établir des estimations sur les solutions des problèmes elliptiques que nous étudierons, nous serons amenés à considérer $\varphi(u)$ comme fonction-test, avec $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Des hypothèses *ad hoc* sur φ nous permettent d'assurer que $\varphi(u)$ est encore dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 1.5 (Stampacchia) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leq p < \infty$. Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, C^1 par morceaux telle que $\varphi(0) = 0$ et φ' est bornée sur $\mathbb{R}$. Alors $\varphi(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $\nabla\varphi(u) = \varphi'(u)\nabla u$ presque partout.*

Avant de prouver le théorème, faisons quelques remarques.

Remarque 1.1 – *La seconde étape de la démonstration consiste à montrer que pour tout réel $a \in \mathbb{R}$, $\nabla u = 0$ p.p. sur $\{x \in \Omega : u(x) = a\}$.*
– *Le théorème est aussi vrai lorsque $p = \infty$.*

Démonstration du théorème de Stampacchia : La démonstration se fait en trois étapes.
Première étape. On commence par supposer que la fonction φ est de plus dans C^∞. On considère alors une suite de fonctions $\{u_n\}_{n\geq 1}$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$. Alors $\varphi(u_n) \to \varphi(u)$ dans $L^p(\Omega)$; en effet, pour tout $x \in \Omega$,

$$|\varphi(u_n(x)) - \varphi(u(x))| \leq \|\varphi'\|_{L^\infty}|u_n(x) - u(x)|$$

et le second membre tend vers 0 dans $L^p(\Omega)$. On remarque aussi que $\nabla\varphi(u_n) = \varphi'(u_n)\nabla u_n$ est borné dans $L^p(\Omega)$. On affirme ensuite que $\nabla\varphi(u_n) \to \varphi'(u)\nabla u$ dans $L^p(\Omega)$; en effet,

$$\begin{aligned} |\nabla\varphi(u_n) - \varphi'(u)\nabla u| &\leq |\varphi'(u_n) - \varphi'(u)|.|\nabla u| + |\varphi'(u_n)|.|\nabla u_n - \nabla u| \\ &\leq |\varphi'(u_n) - \varphi'(u)|.|\nabla u| + C|\nabla u_n - \nabla u| \end{aligned}$$

et l'on peut supposer (quitte à extraire une sous-suite) que $u_n \to u$ p.p. Alors $\varphi'(u_n) \to \varphi'(u)$ p.p. donc par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, $|\varphi'(u_n) - \varphi'(u)||\nabla u| \to 0$ dans $L^p(\Omega)$ et on conclut. Puisque $\varphi(u_n) \to \varphi(u)$ dans $L^p(\Omega)$, on a aussi $\nabla(\varphi(u_n)) \to \nabla(\varphi(u))$ au sens des distributions et on en déduit que $\nabla(\varphi(u)) = \varphi'(u)\nabla u \in L^p(\Omega)$. On a donc montré que $\varphi(u_n) \to \varphi(u)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ et puisque $\varphi(u_n) \in C_c^\infty(\Omega)$ (c'est ici qu'on utilise $\varphi(0) = 0$), cela conclut le cas où φ est régulière.

Seconde étape. On montre maintenant que pour tout réel $a \in \mathbb{R}$,

$$\nabla u = 0 \text{ p.p. sur } \{x : u(x) = a\}.$$

Pour ce faire, nous allons montrer que :

$$1_{[a;+\infty[}\nabla u = 1_{]a;+\infty[}\nabla u = \nabla\varphi(u) \tag{1.1}$$

où $\varphi(s) = (s-a)^+$. Considérons une régularisation φ_n de φ définie par $\varphi_n = (\cdot - a)^+ * \rho_n(s)$ avec $\{\rho_n\}_{n\geq 1}$ un noyau régularisant dont le support est inclus dans $]0, 1/n[$:

On a $\varphi_n' = 1_{]a,+\infty[} * \rho_n \to 1_{]a,+\infty[}$ partout (par décentrement du noyau) et $|\varphi_n'| \leq 1$. Grâce à la première étape, on sait que $\nabla\varphi_n(u) = \varphi_n'(u)\nabla u$ (notons que, pour prouver ceci, nous n'avons pas eu besoin de savoir que $\varphi_n(0) = 0$). Comme $\varphi_n(u) \to \varphi(u)$ partout et que :

$$|\varphi_n(u)| \leq |\varphi_n(0)| + |u| \leq |\varphi(0)| + |u| \in L^p(\Omega)\,,$$

le théorème de convergence dominée nous permet de conclure que $\varphi_n(u) \to \varphi(u)$ dans $L^p(\Omega)$. De plus, $\nabla\varphi_n(u) = \varphi_n'(u)\nabla u$ et $\varphi_n'(u) \to 1_{]a,+\infty[}(u)$ partout ; par convergence dominée, on trouve donc $\nabla\varphi_n(u) \to 1_{]a,+\infty[}(u)\nabla u$ dans $L^p(\Omega)$. En identifiant comme précédemment le gradient de la limite de $\varphi_n(u)$ et la limite du gradient de $\varphi_n(u)$, on conclut que $\nabla\varphi(u) = 1_{]a,+\infty[}(u)\nabla u$. L'autre égalité de (1.1) s'obtient approchant φ par en dessus (noyau décentré dans les réels négatifs) :

Troisième étape. On suppose maintenant que φ est C^1 par morceaux, que sa dérivée est bornée et que $\varphi(0) = 0$. On peut alors approcher φ par des fonctions $\varphi_n \in C^\infty$ telles que $\varphi_n(0) = 0$, $|\varphi_n'| \leq M$ et $\varphi_n' \to \varphi'$ sauf aux points de discontinuité de φ'. Il suffit de considérer un noyau régularisant ρ_n et de poser $\varphi_n = \varphi * \rho_n - \varphi * \rho_n(0)$. Par la première étape, on sait que $\varphi_n(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et que $\nabla\varphi_n(u) = \varphi_n'(u)\nabla u$. Comme $\varphi_n(u) \to \varphi(u)$ partout et que $|\varphi_n(u)| \leq M|u|$, le théorème de convergence dominée nous assure que $\varphi_n(u) \to \varphi(u)$ dans $L^p(\Omega)$. Considérons $E = \{x \in \Omega : u(x)$ point de discontinuité de $\varphi\}$. Hors de E, on a $\varphi_n'(u) \to \varphi'(u)$. Sur E, on utilise la seconde étape pour affirmer que $\nabla u = 0$ presque partout. Ainsi $\nabla\varphi_n(u) = \varphi_n'(u)\nabla u \to \varphi'(u)\nabla u$ p.p. dans Ω. La convergence dominée nous permet de conclure que la convergence a lieu dans $L^p(\Omega)$ et, en raisonnant comme précédemment, on obtient $\nabla\varphi(u) = \varphi'(u)\nabla u$. Cela nous donne $\varphi(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ et comme les $\varphi_n(u)$ sont dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et convergent vers $\varphi(u)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ (c'est ce qu'on vient de prouver), on en déduit bien que $\varphi(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

En guise de généralisation de ce théorème, et bien que cela ne nous soit pas utile dans la suite, il nous semble intéressant de mentionner le résultat suivant.

Théorème 1.6 (Bénilan, [1]) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tel que $D_i u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ pour un $i \in [1, N]$.*

1. *Si $A \subset \mathbb{R}$ est de mesure de Lebesgue nulle alors $D_i u = 0$ presque partout sur $\{x \in \Omega\ :\ u(x) \in A\}$.*
2. *Si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne alors $D_i(\varphi(u)) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et $D_i(\varphi(u)) = \varphi'(u) D_i u$ presque partout.*

Remarque 1.1 *On peut aussi voir que si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $\varphi(0) = 0$ alors $\varphi(u)$ est encore dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Démonstration du théorème 1.6 :
Première étape. Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (tribu des boréliens de $\mathbb{R}$), on note $\varphi_A(t) = \int_0^t \mathbf{1}_A(\tau)\, d\tau$. φ_A étant continue et $|\varphi(s)| \leq |s|$, on a $\varphi_A(u) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.
Soit $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mid D_i(\varphi_A(u)) = \mathbf{1}_A(u) D_i u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)\}$. On remarque que $\mathcal{A}$ contient les intervalles ouverts $]a, b[$; en effet, dans ce cas, $\varphi_{]a,b[}$ est continue, C^1 par morceaux et de dérivée bornée ; on peut alors recopier les deux premières étapes de la démonstration du théorème de Stampacchia (*) pour se convaincre que l'on a alors bien $D_i(\varphi_{]a,b[}(u)) = \mathbf{1}_{]a,b[}(u) D_i u$.
Vérifions que $\mathcal{A}$ est un d-système. On a clairement $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$ car $\varphi_{\mathbb{R}}(s) = s$. Si A et B sont des éléments de $\mathcal{A}$ et $A \subset B$ alors $\varphi_{B\backslash A} = \varphi_B - \varphi_A$ et on a bien $D_i(\varphi_{B\backslash A}(u)) = D_i(\varphi_B(u)) - D_i(\varphi_A(u)) = \mathbf{1}_B(u) D_i u - \mathbf{1}_A(u) D_i u = \mathbf{1}_{B\backslash A}(u) D_i u$, d'où $B\backslash A \in \mathcal{A}$. Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$, alors en notant $A = \cup_n A_n$ on a $\mathbf{1}_{A_n} \to \mathbf{1}_A$ sur $\mathbb{R}$ en croissant donc, par convergence monotone, $\varphi_{A_n} \to \varphi_A$ sur $\mathbb{R}$; de plus, $|\varphi_{A_n}(u)| \leq |u|$ donc par convergence dominée on déduit $\varphi_{A_n}(u) \to \varphi_A(u)$ dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et ainsi $D_i(\varphi_A(u)) = \lim_{n\to\infty} D_i(\varphi_{A_n}(u))$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$; mais $D_i(\varphi_{A_n}(u)) = \mathbf{1}_{A_n}(u) D_i u$ et $\mathbf{1}_{A_n}(u) \to \mathbf{1}_A(u)$ partout donc, par convergence dominée, $D_i(\varphi_{A_n}(u)) \to \mathbf{1}_A(u) D_i u$ dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, et aussi dans $\mathcal{D}'(\Omega)$; on en déduit que $D_i(\varphi_A(u)) = \mathbf{1}_A(u) D_i u$ ce qui prouve que $A \in \mathcal{A}$.
$\mathcal{A}$ est donc un d-système qui contient l'ensemble $\mathcal{P}$ des intervalles ouverts ; il contient donc le d-système engendré par $\mathcal{P}$ qui coincide, puisque $\mathcal{P}$ est stable par intersections finies, avec la tribu engendrée par $\mathcal{P}$, i.e. la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$. On a donc $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

*. Dans la première étape, il faut utiliser le fait que, par simple troncature et convolution, on peut trouver $(u_n)_n$ régulières qui convergent vers u dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et telles que $D_i u_n \to D_i u$ dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

En particulier, cela signifie que le deuxième point est vérifié pour les fonctions de la forme φ_A, en considérant $\mathbf{1}_A$ comme représentant de φ'_A.

Deuxième étape. On prouve le premier point.
Si A est de mesure de Lebesgue nulle, alors $\varphi_A = 0$ donc $\varphi_A(u) = 0$ et $D_i(\varphi_A(u)) = \mathbf{1}_A(u)D_iu = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, et aussi presque partout puisqu'il s'agit d'une fonction. Cela implique bien $D_iu = 0$ presque partout sur $\{x \in \Omega \,:\, u(x) \in A\}$.

Troisième étape. Conclusion.
Si φ est lipschitzienne, on a $|\varphi(t)| \leq |\varphi(0)| + C|t|$ donc $\varphi(u) \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Notons ψ une fonction borélienne bornée qui coincide avec φ' presque partout ; on peut trouver une suite de fonctions simples boréliennes $(s_n)_{n\geq 1}$ qui converge vers ψ partout et telle que $|s_n| \leq |\psi|$ (décomposer ψ en partie positive et partie négative, puis approcher chacune de ces parties par une suite croissante de fonctions simples : la différence de ces deux suites approche ψ comme voulu). Si $\varphi_n(t) = \varphi(0) + \int_0^t s_n(\tau)\,d\tau$, on a, par convergence dominée, $\varphi_n \to \varphi(0) + \int_0^{\cdot} \psi(\tau)\,d\tau = \varphi$ partout et $|\varphi_n(t)| \leq |\varphi(0)| + M|t|$ où M est un majorant de ψ. Ainsi, encore par convergence dominée, $\varphi_n(u) \to \varphi(u)$ dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ et $D_i(\varphi_n(u)) \to D_i(\varphi(u))$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.
Mais s_n est combinaison linéaire de fonctions de la forme $\mathbf{1}_A$ avec A borélien, donc φ_n est combinaison linéaire de fonctions φ_A défines dans la première étape. On voit donc que $D_i(\varphi_n(u)) = s_n(u)D_iu \to \psi(u)D_iu$ partout en étant dominée par $M|D_iu| \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. La convergence a donc lieu en particulier dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, et on trouve, à la limite, $D_i(\varphi(u)) = \psi(u)D_iu$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$; le membre de droite étant une fonction, cela prouve que $D_i(\varphi(u)) \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.
Or $\varphi' = \psi$ en dehors d'un ensemble de mesure nulle A, et $D_iu = 0$ presque partout sur $\{x \in \Omega \,:\, u(x) \in A\}$; on en déduit donc que $D_i(\varphi(u)) = \varphi'(u)D_iu$ presque partout comme annoncé. ∎

Chapitre 2

Equations elliptiques linéaires

2.1 Equations de diffusion pure : le cas coercitif

Dans cette section, Ω est encore un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $A : \Omega \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est mesurable et $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On considère le problème :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,[A(x)\nabla u(x)] = f(x) & \text{dans } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

La matrice $A(x)$ est parfois appelée *matrice de diffusion.* La fonction f est appelée *source.* On suppose que la matrice A est *uniformément elliptique*, *i.e.* il existe deux constantes $\lambda, \Lambda > 0$ telles que :

$$\text{p.p. } x \in \Omega\,,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N\,,\ \lambda|\xi|^2 \leq A(x)\xi \cdot \xi \leq \Lambda|\xi|^2. \tag{2.2}$$

On renforce la seconde inégalité en demandant que l'application A soit bornée (lorsque A est symétrique, (2.2) suffit à dire que A est bornée, mais ce n'est pas le cas en général).
Rappelons qu'une *solution faible* de ce problème est une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega fv. \tag{2.3}$$

On dit qu'une telle solution est faible car on ne demande pas à la fonction d'avoir deux dérivées. Ceci s'oppose à la notion de solution forte et de solution classique. La notion de solution de viscosité est aussi une notion de solution faible (et même très faible).
Le théorème de Lax-Milgram de la théorie des espaces de Hilbert permet d'assurer l'existence et l'unicité d'une solution faible sous l'hypothèse (2.2), pourvu que le second membre de (2.3) définisse une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$. En effet, en considérant la forme bilinéaire $B[u,v] = \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v$, les hypothèses faites sur la matrice de diffusion assurent que B est continue et coercitive sur $H_0^1(\Omega)$, c'est-à-dire vérifie :

$$\begin{aligned} B[u,u] &\geq \alpha\|u\|^2 \qquad \text{(coercitivité)} \\ B[u,v] &\leq \beta\|u\|\,\|v\| \qquad \text{(continuité)} \end{aligned}$$

pour deux constantes positives α, β.
En guise d'amuse-gueule, nous allons montrer un principe du maximum faible : si f est positive, alors u l'est aussi. Dans un second temps, nous allons majorer la norme L^∞ d'une solution éventuelle en fonction d'une norme de la source ; une telle inégalité est appelée *estimation a priori* car on ne suppose pas que la solution existe pour prouver cette estimation. Ici, on sait que cette solution existe mais, de manière générale, obtenir de telles inégalités est une étape importante dans la preuve d'existence. Cette idée sera centrale dans la suite de ce chapitre.

2.1.1 Principe du maximum

Théorème 2.1 *Soit $f \in L^2(\Omega)$ et u la solution faible de (2.1). Si $f \geq 0$ p.p. alors $u \geq 0$ p.p.*

Démonstration : Considérons $\phi(s) = s^-$. Alors par le théorème 1.5, $\phi(u) = u^- \in H_0^1(\Omega)$ et $\nabla u^- = \text{sgn}_-(u)\nabla u$ où $\text{sgn}_-(s) = -1_{]-\infty,0]}(s)$. On choisit alors $v = u^-$ dans (2.3) et on obtient :

$$\int_\Omega \text{sgn}_-(u) A\nabla u \cdot \nabla u = \int_\Omega f u^- \geq 0.$$

Comme $A\nabla u^- \cdot \nabla u^- = (\text{sgn}_-(u))^2 A\nabla u \cdot \nabla u = -\text{sgn}_-(u) A\nabla u \cdot \nabla u$, on conclut que

$$\|u^-\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda} \int_\Omega A\nabla u^- \cdot \nabla u^- \leq 0$$

et donc que $u^- = 0$. ∎

Voici trois conséquences de ce théorème.
- Si $u, v \in H_0^1(\Omega)$ vérifient $-\Delta u \geq -\Delta v$ au sens faible, alors $u \geq v$ (principe de comparaison) — cette conséquence demanderait *a priori* à ce que les deux laplaciens soient des fonctions $L^2(\Omega)$, mais elle est aussi vraie si l'inégalité est comprise au sens des distributions.
- Si $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifie $-\Delta u = 0$ au sens faible, alors $u = 0$ (unicité de la solution faible – déjà connu...).
- Si Ω est régulier (de sorte que la solution dans $H_0^1(\Omega)$ de $-\Delta w = 1$ soit bornée) et $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifie $-\Delta u = f$ au sens faible avec $f \in L^\infty(\Omega)$, alors $u \in L^\infty(\Omega)$ et $\|u\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$.

Dans ce qui suit, nous allons généraliser le dernier résultat.

2.1.2 Estimation L^∞

Théorème 2.2 (Stampacchia, 1965) *Soit $F \in (L^p(\Omega))^N$ avec $p > N \geq 2$. Si $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifie $-\text{div}\,(A\nabla u) = -\text{div}\, F$, alors $u \in L^\infty(\Omega)$ et*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|F\|_{(L^p(\Omega))^N}$$

avec $C = C(\lambda, \Omega, p)$.

Remarque 2.1 – *On peut aussi montrer que u est ν-hölderienne avec $\nu = \nu(\Omega, p, \lambda, ||A||_\infty)$.*
- *Ce résultat permet de résoudre $-\text{div}\,(A\nabla u) = f$ pour $f \in L^1(\Omega)$, en dépit du fait que f n'est pas dans le dual topologique de $H_0^1(\Omega)$ (voir [13]). Mais cette méthode ne rentre pas dans le cadre de Lax-Milgram et est limitée aux équations linéaires.*
- *En fait, une caractérisation classique du dual de $W_0^{1,q}(\Omega)$ ($1 \leq q < \infty$) dit que toute forme linéaire continue sur $W_0^{1,q}(\Omega)$ se représente comme un $\text{div}(F)$ pour $F \in (L^{q'}(\Omega))^N$ dont la norme peut être contrôlée par la norme de la forme linéaire (la réciproque, que tous ces $\text{div}(F)$ donnent des formes linéaires sur $W_0^{1,q}(\Omega)$, est triviale). Le théorème de Stampacchia affirme donc que si le second membre de (2.1) est dans $(W_0^{1,p'}(\Omega))' = W^{-1,p}(\Omega)$ pour $1 \leq p' < N/(N-1)$, alors la solution correspondante est bornée.*

Démonstration : Nous considérons, pour $k \geq 0$, la fonction S_k définie par $S_k(x) = (x-k)^+ - (x+k)^-$.

Par le théorème 1.5, on sait que $\nabla S_k(u) = 1_{E_k}\nabla u \in H_0^1(\Omega)$ où $E_k = \{|u| \geq k\}$. On peut donc prendre cette fonction comme fonction-test et obtenir :

$$\int_\Omega F \cdot 1_{E_k}\nabla u = \int_\Omega A\nabla u \cdot (1_{E_k}\nabla u) = \int_\Omega A 1_{E_k}\nabla u \cdot 1_{E_k}\nabla u \geq \lambda \int_\Omega |1_{E_k}\nabla u|^2 = \lambda \int_\Omega |\nabla S_k(u)|^2$$

(remarquons que $1_{E_k}^2 = 1_{E_k}$). Donc

$$\int_\Omega |\nabla S_k(u)|^2 \leq \frac{\|F\|_{L^p}}{\lambda} \left(\int_\Omega |\nabla S_k(u)|^{p'} \right)^{1/p'}$$

où p' est l'exposant conjugué de p. Comme $p > N \geq 2$, on a $2/p' > 1$ et donc

$$\int_\Omega |\nabla S_k(u)|^{p'} = \int_\Omega |\nabla S_k(u)|^{p'} 1_{E_k} \leq \left(\int_\Omega |\nabla S_k(u)|^2 \right)^{p'/2} |E_k|^{\frac{2-p'}{2}},$$

en utilisant l'inégalité de Hölder avec $\frac{2}{p'}$ et $\frac{2}{2-p'}$. En combinant les deux inégalités ainsi obtenues, on arrive à :

$$\|\nabla S_k(u)\|_{L^2} \leq \frac{\|F\|_{L^p}}{\lambda} |E_k|^{\frac{2-p'}{2p'}}. \tag{2.4}$$

Considérons alors $h \geq k$. On remarque que sur E_h, $|S_k(u)| \geq h - k$ et donc

$$\int_\Omega |S_k(u)|^{N/(N-1)} \geq \int_{E_h} (h-k)^{N/(N-1)} = (h-k)^{N/(N-1)} |E_h|.$$

Par ailleurs,

$$\int_\Omega |S_k(u)|^{N/(N-1)} = \|S_k(u)\|_{L^{N/(N-1)}}^{N/(N-1)} \leq C \|S_k(u)\|_{W_0^{1,1}}^{N/(N-1)} = C \left(\int_\Omega |\nabla S_k(u)| \right)^{N/(N-1)},$$

l'inégalité étant une conséquence des injections de Sobolev. Ceci nous permet d'arriver finalement à :

$$\begin{aligned}
(h-k)|E_h|^{(N-1)/N} &\leq C \int_\Omega |\nabla S_k(u)| 1_{E_k} \\
&\leq C \|S_k(u)\|_{L^2(\Omega)} |E_k|^{1/2} \\
&\leq C \frac{\|F\|_{L^p}}{\lambda} |E_k|^{\frac{2-p'}{2p'} + \frac{1}{2}} \\
&= C \frac{\|F\|_{L^p}}{\lambda} |E_k|^{\frac{1}{p'}}
\end{aligned}$$

On a successivement utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz et (2.4). En posant $\beta = \frac{1}{p'} \frac{N}{N-1} = (1 - \frac{1}{p}) \frac{N}{N-1}$, $\gamma = \frac{N}{N-1}$ et $M = \left(C \frac{\|F\|_{L^p}}{\lambda} \right)^{N/(N-1)}$, on obtient finalement :

$$|E_h| \leq \frac{M}{(h-k)^\gamma} |E_k|^\beta.$$

Il nous suffit pour conclure de trouver H tel que $|E_H| = 0$, car on aura alors $|u| \leq H$ presque partout. En constatant que $p > N$ implique $\beta > 1$, le lemme 2.1 ci-dessous montre finalement que $\|u\|_\infty \leq C_0 2^{1/\gamma} \frac{C}{\lambda} \|F\|_{L^p} |\Omega|^{\frac{\beta-1}{\gamma}}$ avec $C_0 = C_0(p, N)$, ce qui achève la démonstration. ∎

Lemme 2.1 *Soit $\Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante telle qu'il existe $\beta > 1$ et $\gamma > 0$ vérifiant, pour tout $h > k$,*

$$\Phi(h) \leq \frac{M}{(h-k)^\gamma} \Phi(k)^\beta.$$

Alors il existe une constante C_0 ne dépendant que de β et γ tel que $H = C_0 (2M)^{1/\gamma} \Phi(0)^{\frac{\beta-1}{\gamma}}$ annule Φ.

Démonstration du lemme 2.1 : Construisons par récurrence une suite croissante de réels $\{h_n\}_{n\geq 1}$ telle que pour tout $n \geq 1$, $\Phi(h_n) \leq \frac{\Phi(0)}{2^n}$. Prenons $h_0 = 0$ et supposons construits $h_0, \ldots, h_n$; construisons h_{n+1}. Par hypothèse, pour tout $h > h_n$,

$$\Phi(h) \leq \frac{M}{(h-h_n)^\gamma} \Phi(h_n)^\beta \leq \frac{M}{2^{n\beta} (h-h_n)^\gamma} \Phi(0)^\beta.$$

Il suffit alors de choisir h_{n+1} de telle sorte que :

$$\frac{M}{2^{n\beta}(h_{n+1}-h_n)^\gamma}\Phi(0)^\beta = \frac{\Phi(0)}{2^{n+1}}, \qquad \text{c'est à dire} \quad h_{n+1} = h_n + \frac{(2M\Phi(0)^{\beta-1})^{\frac{1}{\gamma}}}{2^{\frac{(\beta-1)n}{\gamma}}}.$$

On remarque que la série de terme général $h_{n+1}-h_n$ est convergente ($\frac{\beta-1}{\gamma} > 0$) donc h_n croit vers

$$H = \sum_{n\geq 0}(h_{n+1}-h_n) = \sum_{n\geq 0} \frac{(2M\Phi(0)^{\beta-1})^{\frac{1}{\gamma}}}{2^{\frac{(\beta-1)n}{\gamma}}} < \infty$$

et H convient, par décroissance de Φ. ■

2.2 Problèmes de convection-diffusion : le cas non-coercitif

Dans cette section, Ω est encore un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $V : \Omega \to \mathbb{R}^N$ un champ de vecteurs $L^\infty(\Omega)$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On considère le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + \operatorname{div}[V(x)u(x)] = f(x) & \text{dans } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.5}$$

pour $f \in H^{-1}(\Omega)$. Comme pour le problème précédent, on considère la forme bilinéaire associée :

$$B[u,v] = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_\Omega uV \cdot \nabla v$$

pour $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Cette forme bilinéaire est elle aussi continue. Pour pouvoir appliquer le théorème de Lax-Milgram, il faut s'assurer qu'elle est aussi coercitive. Soit donc $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$B[u,u] = \int_\Omega |\nabla u|^2 - \int uV \cdot \nabla u = \int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega V \cdot \nabla u^2/2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega (\operatorname{div} V)u^2/2.$$

Si $\operatorname{div} V \geq 0$, B sera bien coercitive. On peut avoir éventuellement $\operatorname{div} V \leq 0$ mais $\operatorname{div} V$ ne peut pas être trop négatif (si l'on voulait être précis, il faudrait imposer $\operatorname{div} V \geq -2\lambda_1 + \eta$ où λ_1 est la première valeur propre du Laplacien et $\eta > 0$, mais nous ne rentrerons pas dans ces détails).
Il est néanmoins possible de trouver une solution faible au problème (2.5), sans hypothèse sur $\operatorname{div}(V)$. Précisément :

Théorème 2.3 (Droniou, 2001) *Si $f \in H^{-1}(\Omega)$ et si $V \in (L^\infty(\Omega))^N$, alors il existe une unique fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$:*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi - \int_\Omega uV \cdot \nabla\varphi = \langle f, \varphi\rangle.$$

La démonstration de ce théorème repose sur l'idée suivante : puisque l'on sait résoudre le problème (2.1), il suffit de considérer la solution de

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f - \operatorname{div}[V(x)\overline{u}(x)] & \text{dans } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

pour $\overline{u} \in L^2(\Omega)$. On obtient ainsi une application $F : \overline{u} \in L^2(\Omega) \to u \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ dont il s'agit de trouver un point fixe. Pour pouvoir appliquer un théorème de point fixe contractant, il faut imposer à V d'être petit. On essaie donc d'appliquer un point fixe de compacité, à savoir le théorème de Schauder.

Théorème 2.4 (Schauder) *Soit E un espace de Banach et B une boule fermée. Alors toute fonction $F : B \to B$ compacte (i.e. continue et telle que son image est relativement compacte) admet un point fixe.*

Pour notre problème, il suffit de trouver $R > 0$ tel que pour tout $\overline{u} \in L^2(\Omega)$,

$$\|\overline{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq R \Rightarrow \|F(\overline{u})\|_{L^2(\Omega)} \leq R$$

et de montrer que F est continue et compacte. Essayons de trouver un tel R. En prenant comme fonction-test $\varphi = u := F(\overline{u})$ et en majorant grossièrement, on obtient :

$$\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1_0(\Omega)} + C\|u\|_{H^1_0(\Omega)}\|\overline{u}\|_{L^2(\Omega)}$$

et par Poincaré

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1_0(\Omega)} \leq C + C\|\overline{u}\|_{L^2(\Omega)}$$

ce qui ne permet pas de conclure. C'est pour cette raison que nous allons résoudre un problème approché puis passer à la limite.

2.2.1 Problème approché

Considérons la fonction de troncature $T_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $T_n(r) = \max(\min(r, n), -n)$.

On sait par le théorème 1.5 que $T_n(u) \in H^1_0(\Omega)$ pour toute fonction $u \in H^1_0(\Omega)$. Pour tout $\overline{u} \in L^2(\Omega)$, il existe une unique fonction $u \in H^1_0(\Omega)$ telle que pour tout $\varphi \in H^1_0(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi = \langle f, \varphi\rangle + \int_\Omega T_n(\overline{u})V \cdot \nabla\varphi$$

car $\varphi \to \int_\Omega T_n(\overline{u})V \cdot \nabla\varphi$ est dans $H^{-1}(\Omega)$. On peut alors définir une fonction $F : L^2(\Omega) \to H^1_0(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ qui associe u à $\overline{u}$. On veut appliquer le théorème de Schauder. Commençons par trouver R tel que $F(B(0, R)) \subset B(0, R)$. Pour cela, en choisissant $\varphi = u$ comme fonction-test, on obtient (de la même manière que précédemment),

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1_0(\Omega)} \leq C + C\|T_n(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq C + Cn\sqrt{|\Omega|}.$$

Ainsi, en définissant $R = C + Cn\sqrt{|\Omega|}$, F envoie tout $L^2(\Omega)$ dans $B(0, R)$ (et même dans un borné de $H^1_0(\Omega)$), ce qui est plus fort que ce dont on avait besoin.
Montrons maintenant que F est continue. Soit donc une suite $(\overline{u}_k)_k$ qui converge vers $\overline{u}$ dans $L^2(\Omega)$; on pose $u_k = F(\overline{u}_k)$, ainsi que $u = F(\overline{u})$. En soustrayant les équations satisfaites par u_k et u, on obtient, pour $\varphi \in H^1_0(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla(u_k - u) \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega (T_n(\overline{u_k}) - T_n(\overline{u}))V \cdot \nabla\varphi.$$

On choisit alors $\varphi = u_k - u$ et en majorant on obtient, puisque T_n est 1−lipschitzienne,

$$\|u_k - u\|_{H^1_0(\Omega)} \leq C\|T_n(\overline{u}_k) - T_n(\overline{u})\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\overline{u}_k - u\|_{L^2(\Omega)}$$

ce qui permet de conclure que F est continue (et même lipschitzienne à valeurs dans $H^1_0(\Omega)$).
Par ce qui précède, $F(L^2(\Omega))$ est borné dans $H^1_0(\Omega)$, et est donc relativement compact dans $L^2(\Omega)$ (Théorème de Rellich-Kondrachov).
Le théorème de Schauder nous assure donc qu'il existe une fonction $u_n \in H^1_0(\Omega)$ telle que pour tout $\varphi \in H^1_0(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla\varphi = \langle f, \varphi\rangle + \int_\Omega T_n(u_n)V \cdot \nabla\varphi.$$

2.2.2 Estimations sur u_n

Proposition 2.1 *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\| \ln(1 + |u_n|) \|_{H_0^1(\Omega)} \leq C.$$

DÉMONSTRATION : La fonction $\varphi : r \mapsto \int_0^r \frac{1}{(1+|s|)^2}\, ds$ est une fonction C^1 et lipschitzienne, qui s'annule en 0 ; on sait donc que $\varphi(u_n) \in H_0^1(\Omega)$. On choisit alors cette fonction comme fonction-test. Le membre de gauche se calcule comme suit :

$$\int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla \varphi(u_n) = \int_\Omega \left| \frac{\nabla u_n}{1 + |\nabla u_n|} \right|^2 = \int_\Omega |\nabla \ln(1 + |u_n|)|^2 = \| \ln(1 + |u_n|) \|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

(remarquons que $\ln(1 + |\cdot|)$ est elle-même C^1 par morceaux, lipschitzienne et s'annule en 0). De plus, par définition de l'espace $H^{-1}(\Omega)$, on sait que

$$\begin{aligned}
\langle f, \varphi(u_n) \rangle &\leq C \|\nabla \varphi(u_n)\|_{L^2(\Omega)} \\
&= C \left\| \frac{\nabla u_n}{(1 + |u_n|)^2} \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C \left\| \frac{\nabla u_n}{1 + |u_n|} \right\|_{L^2(\Omega)} = C \| \ln(1 + |u_n|) \|_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Enfin, on remarque

$$|T_n(u_n) \nabla \varphi(u_n)| = \left| \frac{T_n(u_n)}{1 + |u_n|} \frac{\nabla u_n}{1 + |u_n|} \right| \leq \frac{|u_n|}{1 + |u_n|} \left| \frac{\nabla u_n}{1 + |u_n|} \right| \leq |\nabla \ln(1 + |u_n|)|.$$

En particulier,

$$\int_\Omega |T_n(u_n) V \cdot \nabla \varphi(u_n)| \leq \int_\Omega |\nabla \ln(1 + |u_n|)| \leq \sqrt{|\Omega|}\, || \ln(1 + |u_n|) ||_{L^2(\Omega)} \leq C || \ln(1 + |u_n|) ||_{H_0^1(\Omega)}.$$

En injectant ces diverses égalités et inégalités dans l'équation satisfaite par u_n, on conclut aisément. ∎

On en déduit le

Corollaire 2.1 *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k > 0$,*

$$|\{u_n \geq k\}| \leq \frac{C}{(\ln(1 + k))^2}.$$

DÉMONSTRATION : Comme $\{x : |u_n(x)| \geq k\} = \{x : (\ln(1 + |u_n(x)|))^2 \geq (\ln(1 + k))^2\}$, les inégalités de Tchébitchev et de Poincaré impliquent

$$|\{x : |u_n(x)| \geq k\}| \leq \frac{1}{(\ln(1 + k))^2} \int_\Omega (\ln(1 + |u_n|))^2 \leq \frac{C}{(\ln(1 + k))^2} \| \ln(1 + |u_n|) \|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

ce qui permet de conclure. ∎

Théorème 2.5 *La suite $\{u_n\}_{n \geq 1}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.*

DÉMONSTRATION : on procède en deux étapes. Tout d'abord on trouve k tel que la suite $(S_k(u_n))_{n \geq 1}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. Ensuite on estime $u_n - S_k(u_n) = T_k(u_n)$.
On choisit cette fois-ci $S_k(u_n)$ comme fonction-test dans l'équation satisfaite par u_n et comme précédemment, on estime successivement les trois termes. Les deux premiers sont très simples :

$$\int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla S_k(u_n) = \int_\Omega |\nabla S_k(u_n)|^2 , \qquad \langle f, S_k(u_n) \rangle \leq C \|S_k(u_n)\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Pour ce qui est du troisième,

$$\left| \int_\Omega T_n(u_n) V \cdot \nabla S_k(u_n) \right| \leq C \int_\Omega |u_n|\, |\nabla S_k(u_n)| \leq C ||u_n||_{L^2(\Omega)} \|S_k(u_n)\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

On utilise ensuite le fait que $|u_n| \leq k + |S_k(u_n)|$:

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega T_n(u_n)V\cdot\nabla S_k(u_n)\right| &\leq C(k\sqrt{|\Omega|} + \|S_k(u_n)\|_{L^2(\Omega)})\|S_k(u_n)\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq Ck\|S_k(u_n)\|_{H_0^1(\Omega)} + C\|S_k(u_n)\|_{L^2(\Omega)}\|S_k(u_n)\|_{H_0^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

On estime alors $\|S_k(u_n)\|_{L^2(\Omega)}$ en utilisant l'inégalité de Hölder (en se souvenant que $S_k(u_n) = 0$ hors de $\{x : |u_n(x)| \geq k\}$) et une inégalité de Sobolev (qui assure qu'il existe un $p > 2$ tel que $H_0^1(\Omega)$ s'injecte dans $L^p(\Omega)$),

$$\|S_k(u_n)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|S_k(u_n)\|_{L^p(\Omega)}|\{x : |u_n(x)| \geq k\}|^\theta \leq C\|S_k(u_n)\|_{H_0^1(\Omega)}|\{x : |u_n(x)| \geq k\}|^\theta$$

avec $\theta = 1/p' > 0$. En utilisant le corollaire 2.1, on obtient donc :

$$\left|\int_\Omega T_n(u_n)V\cdot\nabla S_k(u_n)\right| \leq Ck\|S_k(u_n)\|_{H_0^1(\Omega)} + \frac{C}{(\ln(1+k))^2}\|S_k(u_n)\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Ces trois estimations conduisent à

$$\|S_k(u_n)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C + Ck + \frac{C}{(\ln(1+k))^2}\|S_k(u_n)\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Il suffit alors de prendre k suffisamment grand pour obtenir une estimation sur $S_k(u_n)$ indépendante de n.
On fixe à partir de maintenant un tel k. Pour prouver une estimation sur $T_k(u_n)$, on la prend comme fonction-test :

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^2 \leq C\|T_k(u_n)\|_{H_0^1(\Omega)} + C\int_\Omega |T_n(u_n)|\,|\nabla T_k(u_n)|.$$

Il suffit alors de remarquer que $\nabla T_k(u_n) = 0$ si $|u_n| \geq k$ et que $|T_n(u_n)| \leq |u_n| \leq k$ sinon pour conclure l'estimation sur $T_k(u_n)$ et donc la démonstration du théorème. ∎

2.2.3 Passage à la limite

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que u_n converge faiblement vers une fonction u dans $H_0^1(\Omega)$ et que $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$. On considère alors une fonction-test $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Montrons que $T_n(u_n) \to u$ dans $L^2(\Omega)$:

$$\|T_n(u_n) - u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|T_n(u_n) - T_n(u)\|_{L^2(\Omega)} + \|T_n(u) - u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} + \|T_n(u) - u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Le théorème de convergence dominée nous assure que $T_n(u) \to u$ et donc on a bien $T_n(u_n) \to u$ dans $L^2(\Omega)$. On passe alors à la limite dans l'équation satisfaite par u_n et on conclut que :

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi = \langle f, \varphi\rangle + \int_\Omega uV\cdot\nabla\varphi.$$

Ainsi u est une solution du problème que l'on cherchait à résoudre.

Remarque 2.2 1. *On peut en fait montrer que u_n converge vers u dans $H_0^1(\Omega)$.*

2. *En utilisant plus finement les injections de Sobolev, on peut supposer uniquement $V \in (L^q(\Omega))^N$ avec $q > N$ (et même $q = N$ lorsque $N \geq 3$).*

Chapitre 3

Equations elliptiques non-linéaires

3.1 Introduction

Dans la section précédente, nous avons vu quelques techniques qui permettent de traiter des équations du type :

$$-\mathrm{div}\,(A(x)\nabla u) = f(x).$$

Ces équations sont classiquement dites *linéaires* (l'ensemble des solutions est un hyperplan). A partir de ces équations, on peut imaginer d'autres problèmes, *non-linéaires* pour leur part ; par exemple :

$$-\mathrm{div}\,(A(x,u)\nabla u) = f(x,u).$$

Dans certains cas comme ceux-ci, on peut se ramener aux équations linéaires en utilisant le fait que l'opérateur différentiel reste linéaire par rapport aux dérivées de plus haut dégré, les dérivées secondes. On dit parfois que ces équations sont *semi-linéaires*. Certaines équations sont par contre *totalement non-linéaires* :

$$-\mathrm{div}\,(a(x,u,\nabla u)) = f(x,u).$$

C'est notamment le cas du p-laplacien :

$$-\Delta_p u := -\mathrm{div}\,(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f$$

qui est l'équation d'Euler du problème de calcul des variations dont la fonctionnelle à minimiser est : $\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p - \int_\Omega fu$.

Dans cette section, nous traitons les problèmes elliptiques de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ll} -\mathrm{div}\,(a(x,u,\nabla u)) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{3.1}$$

Voici la stratégie générale que nous allons adopter (nous sommes volontairement peu précis pour l'instant). Tout d'abord nous chercherons des solutions faibles ; pour toute fonction-test φ nulle au bord :

$$\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla\varphi = \int_\Omega f\varphi.$$

On définit ensuite un opérateur différentiel $A(u)$ par : $\langle A(u),\varphi\rangle = \int_\Omega a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla\varphi$ et il s'agit de montrer qu'il est surjectif. C'est le propos du théorème général suivant, dû à Leray et Lions (1965).

3.2 Un résultat abstrait

Théorème 3.1 *Soit E un espace de Banach séparable et réflexif et $A : E\times E \to E'$ un opérateur tel que :*

1. *Pour tout sous-espace de dimension finie F de E, $u\in F \mapsto A(u,u)\in E'$ est continue.*
2. *Pour tout $v\in E$, $A(\cdot,v) : E\to E'$ est continue "faible-fort"* *

*. continue pour la topologie faible sur l'espace de départ et la topologie forte sur l'espace d'arrivée.

3. *Pour tout $u \in E$ et $\varphi \in E$, $t \in \mathbb{R} \to A(u, u + t\varphi) \in E'$ est continue en* 0
4. *Si $(u_n)_{n\geq 1}$ est borné dans E, alors $(A(u_n, u_n))_{n\geq 1}$ est borné dans E'.*
5. *(Coercitivité) $\lim_{|u|\to+\infty} \frac{\langle A(u,u),u\rangle}{|u|} = +\infty$.*
6. *(Pseudo-monotonie) Pour tout $u, v \in E$,*

$$\langle A(u, v) - A(u, u), v - u\rangle \geq 0.$$

Alors pour $f \in E'$, il existe $u \in E$ tel que $A(u, u) = f$.

Remarque 3.1 *Si on considère $u \to -\mathrm{div}(a(x, u, \nabla u))$, on constate que u apparait sous deux formes : l'une d'ordre 0, l'autre d'autre 1 (le gradient). Etant donné que l'on va raisonner dans des espaces de Sobolev d'ordre 1, la partie d'ordre 0 sera plus aisée à traiter (on aura des propriétés de compacité qui permettront une meilleure continuité par rapport à ce terme). C'est pourquoi on sépare les occurences de u dans la définition de l'opérateur : l'une sera aisée à manipuler (ce qui permet de ne supposer que la deuxième hypothèse, relativement forte en terme de continuité), l'autre contiendra toute la difficulté mais avec des propriétés de monotonie qui rendent cette non-linéarité traitable néanmoins.*

Démonstration : On construit la solution à notre problème par une méthode de Galerkin, *i.e.* une méthode d'approximation qui permet de se ramener (dans une certaine mesure) à un problème en dimension finie. Commençons par le

Lemme 3.1 *Si F est un espace de dimension finie et $g : F \to F'$ est continue et coercitive, i.e.*

$$\lim_{|u|\to+\infty} \frac{\langle g(u), u\rangle}{|u|} = +\infty,$$

alors g est surjective.

Démonstration du lemme 3.1 : On commence par voir qu'on peut se ramener au cas où $F = \mathbb{R}^d$. Pour ce faire, on considère un isomorphisme $\phi : \mathbb{R}^d \to F$ et son adjoint $\phi^* : F' \to \mathbb{R}^d$, et on définit $\overline{g} = \phi^* \circ g \circ \phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. Il est facile de vérifier que $\overline{g}$ est encore continue et coercitive (en considérant "$\langle\ ,\ \rangle$" comme le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^d$) et si on a montré que $\overline{g}$ est surjective, il est clair que g l'est aussi.
On suppose maintenant que $F = \mathbb{R}^d$. On raisonne par l'absurde : supposons que g ne soit pas surjective. Cela veut dire qu'il existe $y \in F'$ tel que $g(x) \neq y$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. On pose alors

$$T(x) = -R\frac{g(x) - y}{|g(x) - y|}$$

et on définit ainsi une application continue $T : \mathbb{R}^N \to S_R \subset \mathbb{R}^d$, où S_R désigne la sphère de rayon R. On peut restreindre T à la boule fermée de rayon R. Le théorème de Brouwer assure alors l'existence d'un point x de la boule tel que $T(x) = x$. Comme T est à valeurs dans la sphère, on a $|x| = R$ et $g(x) = y - |g(x) - y|x/R$. Ainsi

$$\frac{\langle g(x), x\rangle}{|x|} = \frac{\langle y, x\rangle}{|x|} - |g(x) - y|\frac{\langle x, x\rangle}{|x|R} \leq |y|.$$

Mais pour R assez grand, comme $|x| = R$, on doit avoir $\frac{\langle g(x),x\rangle}{|x|} > |y|$, ce qui donne une contradiction. ∎

Puisque E est supposé séparable, il existe une suite croissante $(E_n)_{n\geq 1}$ de sous-espaces de dimension finie telle que $\cup_n E_n$ est dense dans E. On considère alors les fonctions $g_n : E_n \to E_n'$ définies par

$$\langle g_n, v\rangle_{E_n',E_n} = \langle A(u, u), v\rangle_{E',E}.$$

Assurons-nous qu'elles vérifient les hypothèses du lemme 3.1. La continuité est une conséquence de la première hypothèse et la coercitivité est immédiate par la cinquième hypothèse. Il existe donc, pour tout $f \in E'$, un élément $u_n \in E_n$ tel que $A(u_n, u_n) = f_{|E_n}$.

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est bornée dans E ; ceci est une conséquence de la coercitivité : comme $u_n \in E_n$,

$$\frac{\langle A(u_n, u_n), u_n\rangle}{|u_n|} = \frac{\langle f, u_n\rangle}{|u_n|} \leq |f|_{E'}.$$

On peut donc supposer, quitte à extraire une sous-suite, que u_n converge faiblement vers $u \in E$. Par l'hypothèse 4, on sait alors que $(A(u_n, u_n))_{n\geq 1}$ est bornée dans E'. On peut donc aussi supposer que $A(u_n, u_n)$ converge faiblement dans E' vers une forme linéaire χ.
Montrons que $f = \chi$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $v \in E_{n_0}$. La suite de sous-espaces étant croissante, on sait que $v \in E_n$ pour tout $n \geq n_0$. Donc $\langle A(u_n, u_n), v\rangle = \langle f, v\rangle$. Par passage à la limite, on obtient $\langle \chi, v\rangle = \langle f, v\rangle$ ce qui permet de voir que $f = \chi$ sur $\cup_n E_n$; comme ce sous-espace est dense dans E, on en conclut que $f = \chi$ dans E'.
Montrons enfin que $f = A(u, u)$. Soit $\varphi \in E$ quelconque.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle A(u_n, u + t\varphi) - A(u_n, u_n), u + t\varphi - u_n\rangle \\ &= \langle A(u_n, u + t\varphi), u + t\varphi - u_n\rangle - \langle A(u_n, u_n), u + t\varphi\rangle + \langle A(u_n, u_n), u_n\rangle \\ &= \langle A(u_n, u + t\varphi), u + t\varphi - u_n\rangle - \langle A(u_n, u_n), u + t\varphi\rangle + \langle f, u_n\rangle. \end{aligned}$$

En passant à la limite (utiliser l'hypothèse 2 pour le premier terme), on obtient :

$$0 \leq \langle A(u, u + t\varphi), t\varphi\rangle - \langle f, u + t\varphi\rangle + \langle f, u\rangle = \langle A(u, u + t\varphi), t\varphi\rangle - \langle f, t\varphi\rangle.$$

En divisant par $t > 0$ et en laissant $t \to 0$ (utiliser l'hypothèse 3), on obtient

$$\langle A(u, u) - f, \varphi\rangle \geq 0.$$

En prenant $-\varphi$ à la place de φ, on obtient l'inégalité inverse et donc $A(u, u) = f$ dans E', ce qui achève la démonstration. ■

3.3 Existence et stabilité de solutions

Le théorème abstrait que nous avons démontré précédemment va nous permettre de construire des solutions pour le problème (3.1). Voici les hypothèses que nous faisons sur la non-linéarité a :

[H1]. La fonction $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est de Carathéodory :
- Pour presque tout x, $(s, \xi) \mapsto a(x, s, \xi)$ est continue
- Pour tout (s, ξ), $x \mapsto a(x, s, \xi)$ est mesurable

[H2]. *(Coercitivité)* Il existe $\alpha > 0$ et $\Theta \in L^1(\Omega)$ tels que :

$$a(x, s, \xi) \geq \alpha|\xi|^p - \Theta(x).$$

[H3]. Il existe une fonction $b \in L^{p'}(\Omega)$ et $C > 0$ tels que :

$$|a(x, s, \xi)| \leq b(x) + C|\xi|^{p-1}.$$

[H4]. *(Monotonie)*

$$\langle a(x, s, \xi) - a(x, s, \eta), \xi - \eta\rangle \geq 0.$$

Remarque 3.2 *On peut faire mieux concernant l'hypothèse [H3] de croissance, mais nous avons décidé de nous restreindre à ce cas simple qui permet de comprendre les idées essentielles. A noter que le p-laplacien vérifie ces quatres hypothèses.*

Théorème 3.2 *Soit $p \in (1, +\infty)$. Sous les hypothèses [H1]-[H4], pour tout $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, il existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que pour tout $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$,*

$$\int_\Omega a(x, u, \nabla u) \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega f\varphi.$$

Remarque 3.1 *1. L'intégrale $\int_\Omega a(x, u, \nabla u) \cdot \nabla\varphi$ est bien définie car $\nabla\varphi$ est une fonction de $L^p(\Omega)$ et $a(x, u, \nabla u) \in L^{p'}(\Omega)$ grâce à l'hypothèse [H3].*

2. Le théorème dit simplement qu'il existe une solution à (3.1) au sens faible usuel.

Démonstration : Ce résultat est une conséquence directe du théorème 3.1 avec $E = W_0^{1,p}(\Omega)$ et $A(u,v) = -\mathrm{div}(a(x,u,\nabla v))$ (par [H1] et [H3], on constate aisément que A définit bien un opérateur $E \times E \to E'$). Il faut donc s'assurer que les hypothèses sont vérifiées. Nous utiliserons un certain nombre de fois le lemme suivant.

Lemme 3.2 *Si $a(x,u_n,\nabla v_n)$ converge vers $a(x,u,\nabla v)$ dans $(L^{p'}(\Omega))^N$ alors $A(u_n,v_n)$ converge vers $A(u,v)$ dans $E' = W^{-1,p'}(\Omega)$.*

Démonstration du lemme 3.2 : Soit $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Alors :

$$\begin{aligned} |\langle A(u_n,v_n) - A(u,v), \varphi\rangle| &= \left| \int_\Omega (a(x,u_n,\nabla v_n) - a(x,u,\nabla v)) \cdot \nabla\varphi \right| \\ &\leq \|\nabla\varphi\|_{L^p(\Omega)} \|a(x,u_n,\nabla v_n) - a(x,u,\nabla v)\|_{\left(L^{p'}(\Omega)\right)^N}, \end{aligned}$$

ce qui donne la convergence souhaitée. ■

Commençons par vérifier l'hypothèse 1. Soit $(e_1,\dots,e_d)$ une base de F et $u_n = \sum_{i=1}^d t_i^n e_i$ qui converge vers $u = \sum_{i=1}^d t_i e_i$ dans F, i.e. pour tout i, $t_i^n \to t_i$. On a alors $u_n \to u$ et $\nabla u_n \to \nabla u$ partout donc, en utilisant le fait que pour presque tout x la fonction $(s,\xi) \mapsto a(x,s,\xi)$ est continue, on voit que $a(x,u_n,\nabla u_n) \to a(x,u,\nabla u)$ presque partout, en étant majoré ([H3]) par $b(x) + C|\sum_i t_i^n \nabla e_i|^{p-1} \leq b(x) + C'(\sum_i |\nabla e_i|)^{p-1}$ où C' ne dépend que d'un majorant des $(t_i^n)_{i=1,\dots,d\,,\, n\geq 1}$. La convergence dominée nous permet alors de voir que $a(x,u_n,\nabla u_n) \to a(x,u,\nabla u)$ dans $(L^{p'}(\Omega))^N$, et donc de conclure. L'hypothèse 3 se vérifie de la même façon.

Vérifions l'hypothèse 2. On considère donc une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ qui converge faiblement vers u. Cette suite est donc bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ (théorème de Banach-Steinhaus) et, par le théorème de Rellich-Kondrachov, on sait que l'on peut extraire une suite qui converge fortement dans $L^p(\Omega)$ et presque partout. Donc pour presque tout x (utiliser le fait que a est de Carathéodory), $a(x,u_n(x),\nabla v(x)) \to a(x,u(x),\nabla v(x))$. On peut encore une fois dominer la convergence et conclure [†].

Vérifions l'hypothèse 4. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. La suite $(\nabla u_n)_{n\geq 1}$ est alors bornée dans $L^p(\Omega)$ donc $(a(x,u_n(x),\nabla u_n(x))_{n\geq 1}$ est bornée dans $(L^{p'}(\Omega))^N$ par [H3] et $(A(u_n,u_n))_{n\geq 1}$ est bornée dans $W^{-1,p'}(\Omega)$.

L'hypothèse 5 (respectivement l'hypothèse 6) est une conséquence immédiate de [H2] (respectivement de [H4]). Ceci achève la démonstration. ■

Nous allons maintenant montrer que l'on peut passer à la limite dans l'équation lorsque le second-membre converge. Pour cela nous devons renforcer un peu l'hypothèse [H4] en

[H4']. Pour presque tout $x \in \Omega$, pour tout $(s,\xi,\eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ avec $\xi \neq \eta$,

$$\langle a(x,s,\xi) - a(x,s,\eta), \xi - \eta\rangle > 0.$$

Théorème 3.3 (Pseudo-stabilité) *Supposons [H1]-[H3] et [H4']. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de $W^{-1,p'}(\Omega)$ qui converge vers f et $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de $W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $-\mathrm{div}(a(x,u_n,\nabla u_n)) = f_n$. Alors, à une sous-suite près, $u_n \to u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $-\mathrm{div}(a(x,u,\nabla u)) = f$.*

Remarque 3.3 *Si l'on sait qu'il n'existe qu'une solution à notre problème, alors toute la suite converge. Voir le résultat d'unicité plus loin.*

Démonstration : On commence par montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Pour ce faire, on choisit u_n comme fonction-test :

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^p - \int_\Omega \Theta \leq \int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n) \cdot \nabla u_n = \langle f, u_n\rangle$$

†. A priori, on obtient ainsi que la convergence d'une sous-suite de $(A(u_n,v))_{n\geq 1}$ vers $A(u,v)$, mais comme la limite est unique et que l'on peut effectuer ce raisonnement à partir de toute sous-suite de $(A(u_n,v))_{n\geq 1}$, cela prouve bien que la convergence est valable pour toute la suite.

Donc

$$\alpha\|u_n\|^p_{W^{1,p}_0(\Omega)} \leq \|f\|_{W^{-1,p'}(\Omega)}\|u_n\|_{W^{1,p}_0(\Omega)} + \int_\Omega \Theta \leq \frac{\alpha}{2}\|u_n\|^p_{W^{1,p}_0(\Omega)} + C_\alpha\|f\|^{p'}_{W^{-1,p'}(\Omega)} + \int_\Omega \Theta$$

(nous avons utilisé l'inégalité de Young) ce qui permet de conclure.
Grâce au théorème de Rellich-Kondrachov, on peut donc extraire de $(u_n)_{n\geq 1}$ une sous-suite qui converge faiblement dans $W^{1,p}_0(\Omega)$ et presque partout sur Ω vers une fonction u. On montre ensuite que $\nabla u_n \to \nabla u$ presque partout. On considère pour cela la fonction positive suivante :

$$g_n(x) = \langle a(x, u_n(x), \nabla u_n(x)) - a(x, u_n(x), \nabla u(x)), \nabla u_n(x) - \nabla u(x)\rangle \geq 0.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g_n(x)\,dx &= \int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)\cdot\nabla(u_n - u) - \int_\Omega a(x, u_n, \nabla u)\cdot\nabla(u_n - u) \\
&= \langle f_n, u_n - u\rangle - \int_\Omega a(x, u_n, \nabla u)\cdot\nabla(u_n - u).
\end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite tend vers 0. Par convergence dominée dans $L^{p'}(\Omega)$, on obtient que $a(x, u_n(x), \nabla u(x))$ tend vers $a(x, u(x), \nabla u(x))$. De plus, $\nabla u_n - \nabla u$ converge faiblement vers 0 dans $L^p(\Omega)$, donc le deuxième terme du membre de droite tend vers 0 et $\int_\Omega g_n$ tend vers 0. Les fonctions g_n étant positives, g_n tend vers 0 en norme L^1 ; ainsi, quitte à extraire une sous-suite, $g_n \to 0$ presque partout. On écrit ensuite $g_n(x)$ sous la forme,

$$\begin{aligned}
g_n(x) &= a(x, u_n(x), \nabla u_n(x))\cdot\nabla u_n(x) \\
&\quad - a(x, u_n(x), \nabla u_n(x))\cdot\nabla u(x) \\
&\quad - a(x, u_n(x), \nabla u(x))\cdot\nabla(u_n - u)(x).
\end{aligned}$$

On applique alors [H2] et deux fois [H3] et on obtient,

$$\begin{aligned}
\alpha|\nabla u_n(x)|^p - \Theta(x) &\leq g_n(x) + (b(x) + C|\nabla u_n(x)|^{p-1}|)|\nabla u(x)| \\
&\quad + (b(x) + C|\nabla u(x)|^{p-1})(|\nabla u_n(x)| + |\nabla u(x)|) \\
&\leq C' + C'|\nabla u_n(x)|^{p-1} + C'|\nabla u_n(x)|
\end{aligned}$$

(C' dépend de x mais non de n). Donc pour presque tout x, $(\nabla u_n(x))_{n\geq 1}$ est bornée dans $\mathbb{R}$. On peut en extraire une sous-suite (indexée par n_k et dépendant de x) qui converge vers ξ. En passant alors à la limite dans l'expression de $g_{n_k}(x)$, on obtient,

$$0 = (a(x, u(x), \xi) - a(x, u(x), \nabla u(x))\cdot(\xi - \nabla u(x)).$$

La stricte monotonie de a (hypothèse [H4']) nous assure alors que $\xi = \nabla u(x)$. Donc toute la suite $(\nabla u_n(x))_{n\geq 1}$ converge vers $\nabla u(x)$.
Nous montrons à présent que u satisfait l'équation. On remarque que la suite $(a(x, u_n(x), \nabla u_n(x))_{n\geq 1}$ converge presque partout vers $a(x, u(x), \nabla u(x))$. L'hypothèse [H3] nous assure aussi qu'elle est bornée dans $L^{p'}(\Omega)$, $p' > 1$. Le théorème de compacité $L^p - L^q$ nous assure alors la convergence dans $L^q(\Omega)$ pour tout $q < p'$. On considère alors $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, fonction C^∞ à support compact : $\int_\Omega a(x, u_n(x), \nabla u_n(x))\cdot\nabla\varphi \to \int_\Omega a(x, u(x), \nabla u(x))\cdot\nabla\varphi$ et $\langle f_n, \varphi\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$ donc

$$\int_\Omega a(x, u(x), \nabla u(x))\cdot\nabla\varphi = \langle f, \varphi\rangle$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On conclut en utilisant le fait que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $W^{1,p}_0(\Omega)$.
Il nous reste à montrer que u_n converge vers u dans $W^{1,p}_0(\Omega)$. Etant donné que la suite $\{\nabla u_n\}_{n\geq 1}$ converge presque partout vers ∇u, il suffit de montrer qu'elle est L^p-équi-intégrable (théorème de Vitali). On pose pour cela $h_n = a(x, u_n, \nabla u_n)\cdot\nabla u_n + \Theta \geq 0$ et on observe que h_n converge presque partout vers $h = a(x, u, \nabla u)\cdot\nabla u + \Theta \geq 0$. En utilisant l'équation, on voit que $\int_\Omega h_n \to \int_\Omega h$; par un exercice classique, on en déduit que h_n converge vers h en norme L^1. On applique alors le théorème de Vitali et on en déduit que h_n est L^1-équi-intégrable. Etant donné que $h_n \geq \alpha|\nabla u_n|^p$, cela conclut la preuve. ∎

3.4 Un résultat d'unicité

Dans le cas où a ne dépend pas de u (non-linéarité du type $a(x, \nabla u)$), on montre facilement que l'on a unicité sous les hypothèses [H1]-[H3] et [H4']. Si l'on renforce l'hypothèse [H4'], on peut encore avoir unicité dans certains cas plus généraux.

Théorème 3.4 (Boccardo, Gallouët, Murat, 1992) *Soit $p \in]1,2]$ et une fonction a vérifiant les hypothèses [H1]-[H3] et :*
[H4"]. Il existe $\gamma > 0$ tel que

$$\langle a(x,s,\xi) - a(x,s,\eta), \xi - \eta \rangle \geq \gamma |\xi - \eta|^2 (|\xi| + |\eta|)^{p-2}.$$

[H5]. Il existe $C > 0$ et $h \in L^{p'}(\Omega)$ tels que

$$|a(x,s,\xi) - a(x,t,\xi)| \leq C|s-t|(h + |\xi|^{p-1} + |t|^{p-1} + |s|^{p-1}).$$

Alors pour $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, la solution $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de $-\mathrm{div}(a(x,u,\nabla u)) = f$ est unique.

Remarque 3.4 *Le p-Laplacien vérifie [H4"] si $p < 2$. L'unicité n'a pas lieu pour $p > 2$ (voir [4]). En revanche on peut l'obtenir si l'on ajoute à $-\mathrm{div}(a(x,u,\nabla u))$ un terme de la forme $\lambda |u|^{p-2} u$ avec $\lambda > 0$.*

Démonstration : Nous ne montrerons le théorème que dans le cas $p = 2$ et nous renvoyons à [4] pour la preuve dans les autres cas. Soit u et v deux solutions et $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, une fonction-test. On a

$$\int_\Omega (a(x,u,\nabla u) - a(x,u,\nabla v)) \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega (a(x,v,\nabla v) - a(x,u,\nabla v)) \cdot \nabla \varphi. \tag{3.2}$$

On choisit alors $\varphi = T_\varepsilon(u-v)$ où T_ε est la fonction de troncature ($T_\varepsilon(r) = \max(\min(\varepsilon, r), -\varepsilon)$). Par le théorème 1.5, on sait que $\nabla \varphi = \mathbf{1}_{A_\varepsilon} \nabla(u-v)$ avec $A_\varepsilon = \{x : 0 < |u-v| \leq \varepsilon\}$ (en effet, on rappelle que $\nabla(u-v) = 0$ presque partout dans $\{u = v\}$). On applique [H4"] au membre de gauche et [H5] à celui de droite et on trouve :

$$\gamma \int_{A_\varepsilon} |\nabla(u-v)|^2 \leq \int_{A_\varepsilon} C|u-v|(h + |\nabla v| + |u| + |v|)|\nabla(u-v)| \leq C\varepsilon \int_\Omega H |\nabla T_\varepsilon(u-v)|$$

où $H = h + |\nabla v| + |u| + |v| \in L^2(\Omega)$. On remarque que $\int_{A_\varepsilon} |\nabla(u-v)|^2 = \int_\Omega |\mathbf{1}_{A_\varepsilon} \nabla(u-v)|^2 = \int_\Omega |\nabla T_\varepsilon(u-v)|^2 = \|T_\varepsilon(u-v)\|^2_{H_0^1(\Omega)}$. Alors :

$$\gamma \|T_\varepsilon(u-v)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C\varepsilon \|H\|_{L^2(\Omega)} \|T_\varepsilon(u-v)\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Les inégalités de Poincaré (pour $p = 1$) et de Cauchy-Schwarz permettent d'obtenir :

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{A_\varepsilon} |T_\varepsilon(u-v)| \leq \frac{C}{\varepsilon} \int_{A_\varepsilon} |\nabla T_\varepsilon(u-v)| \leq \frac{C}{\varepsilon} \|T_\varepsilon(u-v)\|_{H_0^1(\Omega)} |A_\varepsilon|^{1/2} \leq C|A_\varepsilon|^{1/2}.$$

Or $\cap_{\varepsilon > 0} A_\varepsilon = \emptyset$ et $(A_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ est décroissant quand $\varepsilon \to 0$. Donc $|A_\varepsilon| \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$. On choisit $r > 0$ quelconque et $\varepsilon < r$. On a alors :

$$|\{x : |u-v| \geq r\}| \leq |\{x : |u-v| \geq \varepsilon\}| \leq |\{x : |T_\varepsilon(u-v)| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega |T_\varepsilon(u-v)| \to 0$$

quand $\varepsilon \to 0$. Ainsi pour tout $r > 0$, $|u-v| < r$ presque partout. On conclut donc que $u = v$ presque partout. ■

3.5 Second membre mesure

On veut maintenant considérer des sources f d'un type différent. En particulier, on aimerait pouvoir traiter le cas de source qui sont des mesures. Ceci est motivé par les applications ; par exemple, la modélisation de l'extraction d'huile (pétrole) d'une nappe rentre dans ce cadre : on injecte de l'eau par un trou d'un mètre de diamètre dans une nappe dont la grandeur caractéristique est de l'ordre du

kilomètre. La source est alors naturellement modélisée par une mesure portée par un point ou un segment de droite dans l'ouvert considéré.
On veut donc pouvoir traiter le cas où f est une mesure sur Ω. Si $p > N$, la théorie présentée précédemment s'applique. En effet, les injections de Sobolev nous assurent que $W_0^{1,p}(\Omega)$ s'injecte continuement (et densément) dans $C(\overline{\Omega})$, l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$. On en déduit donc que les mesures de Radon régulières, définies comme les éléments du dual topologique de $C(\overline{\Omega})$, sont bien dans $(W_0^{1,p}(\Omega))' = W^{-1,p'}(\Omega)$.
Il nous reste donc à traiter le cas $p \leq N$. Supposons $p < N$ (le cas $p = N$ n'est pas plus dur, il est juste plus technique à écrire à cause des injections de Sobolev limites) et prenons $f \in L^1(\Omega)$ (ici aussi, le cas d'une mesure générale n'est pas différent, il faut juste, dans l'étape d'approximation, prendre une suite qui converge au sens faible-$*$ des mesures). Supposons de plus que les hypothèses [H1]-[H3] et [H4'] sont vérifiées.

Problème approché. On commence par approcher f par des fonctions f_n régulières (L^∞ suffit) tel que $f_n \to f$ en norme L^1. Soit alors u_n une solution associée à cette source f_n.

Estimations a priori. Soit $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Alors $\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega f_n\varphi$. On choisit $\varphi = \theta(u_n)$ avec $\theta(r) = \int_0^r \frac{dt}{(1+|t|)^m}$ pour un $m > 1$. Cette fonction vérifie les hypothèses du théorème 1.5. On obtient donc :

$$\int_\Omega \theta'(u_n)a(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega f_n\theta(u_n) \leq \|f_n\|_{L^1(\Omega)}\|\theta\|_\infty \leq M.$$

On applique alors [H2] :

$$\alpha \int_\Omega \theta'(u_n)|\nabla u_n|^p \leq M + \int_\Omega \theta'(u_n)\Theta \qquad \text{donc} \qquad \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{(1 + |u_n|)^m} \leq M.$$

On pose $\Psi(r) = \int_0^r \frac{dt}{(1+|t|)^{m/p}}$ et on observe que $\nabla\Psi(u_n) = \Psi'(u_n)\nabla u_n = \frac{\nabla u_n}{(1+|u_n|)^{m/p}}$; on en déduit que la suite $\{\nabla\Psi(u_n)\}_{n\geq 1}$ est bornée dans $L^p(\Omega)$. Donc $\{\Psi(u_n)\}_{n\geq 1}$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Grâce aux injections de Sobolev, elle est aussi bornée dans $L^{Np/(N-p)}(\Omega)$. Or $\Psi(r)$ se comporte comme $|r|^{1-m/p}$ quand $|r| \to \infty$ donc $\{|u_n|^{1-m/p}\}_{n\geq 1}$ est bornée dans $L^{Np/(N-p)}(\Omega)$. Ainsi $\{|u_n|^{N(p-m)/(N-p)}\}_{n\geq 1}$ est borné dans $L^1(\Omega)$. Soit $1 \leq q < p$. En utilisant l'inégalité de Hölder, on trouve :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_n|^q &= \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^q}{(1 + |u_n|)^{mq/p}}(1 + |u_n|)^{mq/p} \\
&\leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{(1 + |u_n|)^m}\right)^{q/p} \left(\int_\Omega (1 + |u_n|)^{mq/(p-q)}\right)^{(p-q)/p} \\
&\leq M \left(\int_\Omega (1 + |u_n|)^{mq/(p-q)}\right)^{(p-q)/p}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\{u_n\}_{n\geq 1}$ est bornée dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ si $mq/(p-q) = N(p-m)/(N-p)$ avec $m > 1$, c'est-à-dire $q = N(p-m)/(N-m)$. Ceci impose $p > 2 - 1/N$ (pour que $q > 1$ soit possible) et, dans ce cas, les $q \in [1, p[$ atteignables par $N(p-m)/(N-m)$ lorsque m parcourt $]1, +\infty[$ sont $[1, N(p-1)/(N-1)[$.

Passage à la limite. Nous montrons ici comment passer à la limite dans le cas quasi-linéaire, c'est-à-dire quand $a(x, u, \nabla u) = \tilde{a}(x, u)\nabla u$ (on a alors forcément $p = 2$). Pour tout $q \in [1, N(p-1)/(N-1)[$ rationnel, on peut extraire une sous-suite de $(u_n)_{n\geq 1}$ qui converge faiblement dans $W_0^{1,q}(\Omega)$. Par un procédé d'extraction diagonale, on peut alors construire une sous-suite qui converge faiblement vers un même u dans tous les $W_0^{1,q}(\Omega)$ pour tout $q \in \mathbb{Q} \cap [1, N(p-1)/(N-1)[$ et donc pour tout $q \in [1, N(p-1)/(N-1)[$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Alors :

$$\int_\Omega \tilde{a}(x, u_n)\nabla u_n \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega f_n\varphi \to \int_\Omega f\varphi$$

Dans le cas quasilinéaire, l'hypothèse [H3] revient à supposer que $\tilde{a}$ est borné. Etant donné que $\nabla u_n \to \nabla u$ faiblement dans $L^q(\Omega)$ pour un $q > 1$, que $\tilde{a}(x, u_n)$ converge presque partout vers $\tilde{a}(x, u)$ et que $\nabla\varphi$ est borné (de sorte que $\widetilde{a}(x, u_n)\nabla\varphi$ converge dans $L^{q'}(\Omega)$ par convergence dominée), nous pouvons passer à la limite dans le membre de gauche de l'équation ci-dessus. On obtient donc :

$$\int_\Omega \tilde{a}(x,u)\nabla u \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega f\varphi.$$

Le résultat général qu'on peut prouver (voir [3]) est alors le suivant.

Théorème 3.5 (Boccardo, Gallouët, 1989) *Soit $p > 2 - 1/N$ et $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Sous les hypothèses [H1]-[H3] et [H4'], il existe $u \in \cap_{q<\frac{N(p-1)}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega)$ vérifiant $\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla\varphi = \int_\Omega \varphi d\mu$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.*

Remarque 3.2
1. *Si $p \leq 2 - 1/N$, il faut chercher la solution dans un autre espace fonctionnel. On pourra consulter [2].*
2. *En général, la solution construite n'est pas unique, même dans le cas linéaire (voir [12, 10]).*

3.6 Exercices

Exercice 3.1 (Principe du maximum) *Supposons [H1]-[H4] avec $\Theta = 0$. Si $f \in L^{p'}(\Omega)$ est positive presque partout, alors toute solution dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ de (3.1) est positive presque partout.*

Exercice 3.2 (borne L^∞) *Si $f \in L^r(\Omega)$ avec $r > \frac{N}{p-1}$, alors toute solution dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ de (3.1) est essentiellement bornée.*

Exercice 3.3 (Equation non-linéaire non-coercitive) *Soit $\Phi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ de Carathéodory telle que :*

$$|\phi(x,s)| \leq C(1 + |s|^{p-1}).$$

On suppose que a vérifie [H1]-[H3] et [H4']. Soit $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$.

1. *Soit $n \geq 1$ et T_n la troncature usuelle. Montrer qu'il existe $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solution de*

$$-\mathrm{div}(a(x,u,\nabla u)) - \mathrm{div}(\Phi(x, T_n(u))) = f.$$

2. *Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.*
3. *Montrer que, à une sous-suite près, on a $u_n \to u$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, presque partout sur Ω et $\nabla u_n \to \nabla u$ presque partout sur Ω.*
4. *En déduire qu'il existe une solution $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ à*

$$-\mathrm{div}(a(x,u,\nabla u)) - \mathrm{div}(\Phi(x,u)) = f.$$

Exercice 3.4 (La totale : non-linéaire, non-coercitif et à données mesures) *On reprend la solution u de l'exercice précédent et on suppose en plus que $f \in \mathcal{M}(\Omega)$. Etablir des estimations sur u qui ne dépendent que de la norme de f dans $\mathcal{M}(\Omega)$, et non de sa norme dans $W^{-1,p'}(\Omega)$.*

Chapitre 4

Lois de conservation scalaires

4.1 Introduction

On considère dans cette partie des problèmes de la forme

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \partial_x(f(u))(t,x) = 0 & t > 0\,,\ x \in \mathbb{R}\,, \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4.1}$$

avec $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ (mais “localement lipschitzienne” suffirait en fait, sauf dans la méthode des caractéristiques et pour prouver la régularité de la solution de l'approximation visqueuse) et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ (au moins...).
Tout ce qu'on dit peut s'étendre au cas multi-dimensionnel ($x \in \mathbb{R}^N$, f remplacée par une application à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ et ∂_x remplacé par div_x), mais cela ajoute de la technique à certains endroits, sans grand intérêt vis-a-vis de la compréhension du problème.

4.2 Méthode des caractéristiques

Une première idée pour aborder (4.1) est d'en chercher des solutions régulières. A ce titre, la méthode des caractérisques — qui remplace (4.1) par une équation différentielle ordinaire — est un outil usuel.

On prend ici u_0 régulière (par exemple C^∞ avec toutes ses dérivées bornées, mais on peut alléger ceci). L'idée est de chercher une fonction $X : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ telle que, si u est une solution classique de (4.1), $t \to u(t, X(t))$ soit constante ; on aurait alors

$$\frac{d}{dt}u(t,X(t)) = \partial_t u(t,X(t)) + X'(t)\partial_x u(t,X(t)) = 0$$

et, puisque u vérifie (4.1), on a aussi

$$\partial_t u(t,X(t)) + f'(u(t,X(t)))\partial_x u(t,X(t)) = 0.$$

Une bête identification nous suggère alors de poser $X'(t) = f'(u(t,X(t)))$ et, en se souvenant qu'on a alors $u(t,X(t))$ constant et en notant $x = X(0)$, on trouve

$$X'(t) = f'(u_0(x))\,, \quad \text{soit } X(t) = x + f'(u_0(x))t.$$

Les “caractéristiques”, courbes le long desquelles les solutions régulières de (4.1) sont constantes, sont donc des droites, extrèmement simples à calculer ; et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $u(t, x + f'(u_0(x))t) = u_0(x)$.

Lemme 4.1 *Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ bornée et dont toutes les dérivées sont bornées. Soit*

$$T^* = \begin{cases} +\infty & si \quad \inf_{x\in\mathbb{R}}(f''(u_0(x))u_0'(x)) \geq 0\,, \\ -\dfrac{1}{\inf_{x\in\mathbb{R}}(f''(u_0(x))u_0'(x))} & sinon. \end{cases}$$

Il existe $a < 0$ tel que l'application $\psi : (t,x) \in]a,T^*[\times\mathbb{R} \to (t, x + f'(u_0(x))t) \in]a,T^*[\times\mathbb{R}$ est un C^∞-difféomorphisme.

Démonstration du lemme 4.1 : Soit $\varphi_t(x) = x + f'(u_0(x))t$. On a $\varphi_t'(x) = 1 + f''(u_0(x))u_0'(x)t$; pour tout $t \in [0, T^*[$, $\varphi_t' > 0$ sur $\mathbb{R}$, et si on prend $a < 0$ assez petit, par exemple a tel que

$$|a \sup_x (f''(u_0(x))u_0'(x))| < 1,$$

ceci reste vrai sur $]a, 0]$. Pour tout $t \in]a, T^*[$, φ_t est donc strictement croissant sur $\mathbb{R}$ et, puisque u_0 est bornée, $\varphi_t(x) \to \pm\infty$ lorsque $x \to \pm\infty$. Pour ces t, φ_t est donc un difféomorphisme de $\mathbb{R}$.
Cela prouve le caractère bijectif de ψ : pour tout $(s, y) \in]a, T^*[\times\mathbb{R}$, il existe un unique $(t, x) = (s, \varphi_s^{-1}(y))$ tel que $\psi(t, x) = (s, y)$. On a de plus

$$J\psi(t, x) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f'(u_0(x)) & \varphi_t'(x) \end{pmatrix} = \varphi_t'(x)$$

ce qui prouve que ψ est un difféomorphisme local en tout point de $]a, T^*[\times\mathbb{R}$, puisque son déterminant jacobien ne s'annule pas sur cet ensemble. La preuve du lemme est donc achevée. ∎

On peut alors définir, sur $]a, T^*[\times\mathbb{R}$, la fonction régulière $u(t, x) = u_0((\psi^{-1}(t, x))_2) = u_0(\varphi_t^{-1}(x))$. Par définition de ψ, on a $u(0, x) = u_0(x)$ (car $\psi(0, x) = (0, x)$) et, pour tout $(t, x) \in]0, T^*[\times\mathbb{R}$, $u(\psi(t, x)) = u(t, x + f'(u_0(x))t) = u_0(x)$, donc en dérivant par rapport à t,

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t u(t, x + f'(u_0(x))t) + f'(u_0(x))\partial_x u(t, x + f'(u_0(x))t) \\ &= \partial_t u(\psi(t, x)) + f'(u(\psi(t, x)))\partial_x u(\psi(t, x)) \\ &= \partial_t u(\psi(t, x)) + \partial_x(f(u))(\psi(t, x)). \end{aligned}$$

Comme ψ est surjective $]0, T^*[\times\mathbb{R} \to]0, T^*[\times\mathbb{R}$, cela prouve que u vérifie (4.1) sur $]0, T^*[\times\mathbb{R}$.

La méthode des caractéristiques permet donc de construire (explicitement modulo l'inversion de ψ) une solution régulière à (4.1) mais, à part sous des hypothèses structurelles concernant f'' et u_0', uniquement locale en temps. La question reste de savoir si on peut construire génériquement une solution régulière définie sur $]0, \infty[\times\mathbb{R}$.

4.3 Chocs

La réponse est non, et elle est aussi donnée par la méthode des caractéristiques.

Prenons $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ quelconque qui ne soit pas affine. La dérivée de f n'est pas constante, et il existe $a < b$ tels que $f'(a) < f'(b)$ (par exemple). Soit $p < q$ deux réels et u_0 régulière à support compact telle que $u_0(p) = b$, $u_0(q) = a$.
Les caractéristiques issues de p et q sont respectivement $X(t) = p + f'(b)t$ et $Y(t) = q + f'(a)t$. Comme $f'(a) < f'(b)$, elles se coupent en $T = \frac{f'(b) - f'(a)}{q - p} > 0$.

Si u était une solution régulière de (4.1), alors on devrait avoir $u(t, X(t))$ et $u(t, Y(t))$ constantes, respectivement égales à $u_0(p) = b$ et $u_0(q) = a$. Mais comme $X(T) = Y(T)$, on trouverait alors $b = u(T, X(T)) = u(T, Y(T)) = a$, ce qui est une contradiction.

Ce raisonnement montre donc que, quelle que soit la régularité que l'on impose sur la condition initiale, il est généralement vain d'esperer obtenir une solution régulière en tout temps de (4.1) ; à un moment donné, la solution doit devenir discontinue, un "choc" est créé par l'équation hyperbolique.

4.4 Solutions faibles

Il faut donc considérer (comme il est classique en EDP...) une autre notion de solution pour (4.1), une notion plus faible qui permette d'obtenir l'existence d'une solution sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}$ et non pas uniquement pour des temps petits.

Une idée peut être d'utiliser le principe des fonctions-test : on prend une fonction régulière, on multiplie l'équation, on intègre par partie...

Définition 4.1 *Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Une solution faible de (4.1) est une fonction $u \in L^\infty(]0,\infty[\times\mathbb{R})$ telle que, pour tout $\varphi \in C_c^\infty([0,\infty[\times\mathbb{R})$, on ait*

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u(t,x)\partial_t\varphi(t,x) + f(u(t,x))\partial_x\varphi(t,x)\,dtdx + \int_{\mathbb{R}} \varphi(0,x)u_0(x)\,dx = 0. \tag{4.2}$$

La formulation faible a donc permis de relaxer énormément les hypothèses de régularité sur la solution.

Considérons le cas classique du problème de Riemann pour l'équation de Burgers :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \partial_x\left(\frac{u^2}{2}\right)(t,x) = 0 \qquad t>0\,,\ x\in\mathbb{R}\,, \\ u(0,x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x<0\,, \\ +1 & \text{si } x>0 \end{cases} \end{cases} \tag{4.3}$$

("Riemann" fait référence au fait que la condition initiale est constante en deux morceaux, et "Burgers" est le nom donnée à (4.1) lorsque $f(u)=\frac{u^2}{2}$). Vu que $f'(u_0(x)) = u_0(x) = +1$ si $x>0$ et -1 si $x<0$, on a des caractéristiques de la forme :

On s'attend donc à ce que u soit égale à 1 dans la zone de droite et -1 dans la zone de gauche. La question est de savoir quoi mettre comme valeur de u au milieu.
Une première idée est de relier les deux valeurs de u entre $x<-t$ et $x>t$ par la fonction la plus simple possible : affine. On aurait donc $u(t,x)=\frac{x}{t}$ pour $-t\le x\le t$. Et ca marche ! La fonction

$$u(t,x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x<-t\,, \\ \frac{x}{t} & \text{si } -t\le x\le t\,, \\ +1 & \text{si } x>t \end{cases} \tag{4.4}$$

est effectivement une solution faible de (4.3). Cela se vérifie à la main en prenant une fonction-test φ et en découpant les zones d'intégration en trois morceaux (sur chacun desquels u est régulière).

Cependant, ce n'est pas la seule "complétion" possible. On peut penser à une solution encore plus simple : $u(t,x)$ indépendant de t, i.e.

Cette fonction aussi est solution faible de (4.3) (cela se vérifie encore plus facilement que la précédente, puisqu'il n'y a que deux zones de découpe ici).

Et on peut, à partir de ces deux solutions, en construire une infinité : il suffit de commencer par prendre la solution indépendante de t pendant un certain temps T puis, au delà, de mettre la fonction (4.4).

Il est donc nécessaire de trouver une notion plus forte que celle de "solution faible", mais qui accepte des fonctions peu régulières.

4.5 Approximation parabolique

L'idée à ce point est de s'inspirer de la physique sous-jacente aux lois de conservation. Dans bien des cas (pas tous cependant), le problème (4.1) est une approximation pour un problème qui contient en fait un petit terme de viscosité (terme effectivement négligeable bien souvent).

Nous allons donc considérer le "véritable" problème parabolique suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon(t,x) + \partial_x(f(u^\varepsilon))(t,x) - \varepsilon\Delta u^\varepsilon(t,x) = 0 & t>0\,,\ x\in\mathbb{R}\,, \\ u^\varepsilon(0,x) = u_0(x) & x\in\mathbb{R} \end{cases} \tag{4.5}$$

où $\varepsilon > 0$. Nous allons montrer qu'il existe une solution (régulière) à ce problème, puis obtenir des estimations sur cette solution et passer à la limite $\varepsilon \to 0$; c'est à partir de cette équation parabolique que nous trouverons une formulation adaptée pour (4.1), formulation pour laquelle nous aurons existence et unicité de la solution.
Dans un premier temps, on va prendre $\varepsilon = 1$ et on note donc u pour u^ε (en fait, un changement d'échelle en temps et sur la fonction f peut toujours permettre de supposer $\varepsilon = 1$; ce n'est que lors des estimations qui nous permettrons de passer à la limite $\varepsilon \to 0$ que nous devrons faire attention à la non-dépendance de ces estimations par rapport à ε).

Remarque 4.1 *La présentation que nous avons choisie plus bas pour aborder ce problème (résoudre (4.5) par point fixe sur la formule de Duhamel) n'est pas standard dans l'étude des équations paraboliques ; de même, les résultat techniques de régularité sur ces solutions que nous prouvons en annexe sont loin d'être optimaux (il suffit par exemple d'avoir une condition initiale dans $L^1(\mathbb{R})$ pour que toutes les dérivées spatiales des solutions de (4.5) soit dans $L^1(\mathbb{R})$ en tout temps — avec une borne uniforme sur leur norme L^1 loin de $t = 0$).*
Cependant, nous ne cherchons pas ici à faire une étude fine des équations paraboliques... nous souhaitons juste connaitre suffisamment d'informations sur les solutions de (4.5) afin de trouver des solutions à (4.1) par passage à la limite $\varepsilon \to 0$. Nous avons donc décidé de faire une étude peu conforme et peu optimale de (4.5), mais qui a l'avantage de ne pas faire appel à des résultats généraux sur les équations paraboliques (le seul outil que nous employons est le théorème de point fixe contractant) et est donc auto-consistante (modulo la régularité C^∞ et les bornes sur les dérivées des solutions de (4.5) — mais la preuve de cette régularité et de ces bornes n'utilise pas d'autre outil que celui que nous manipulons ici et un lecteur intuitif parviendra à faire cette preuve avec les éléments que nous avons indiqués).
Un autre avantage de raisonner par point fixe sur la formule de Duhamel est que certaines choses que nous présentons ici s'étendent immédiatement à des problèmes plus généraux (comme les systèmes d'équations dans [11] ou les problèmes non-locaux dans [6]).

4.5.1 Existence et unicité d'une solution à l'approximation parabolique

Rappelons quelques faits sur le noyau de la chaleur. Si on considère $\partial_t v - \Delta v = 0$, un passage en Fourier donne $\partial_t \widehat{v} + 4\pi^2\xi^2\widehat{v} = 0$, donc $\widehat{v}(t,\xi) = e^{-4\pi^2 t\xi^2}\widehat{v}(0,\xi)$. On re-passe en variable primale pour trouver finalement

$$v(t,x) = G(t,\cdot) * v(0,\cdot)(x) \quad \text{avec} \quad G(t,x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-4\pi^2 t(\cdot)^2})(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

(la transformée de Fourier d'une gaussienne est un résultat classique...). Le "semi-groupe" de la chaleur, qui donne la solution de l'équation de la chaleur en fonction de la donnée initiale, est donc donné par la convolution par $G(t,\cdot)$, le noyau de la chaleur.

On transforme alors (4.5) pour considérer le terme d'ordre 1 comme un second membre :

$$\partial_t u - \Delta u = -\partial_x(f(u)).$$

La formule de Duhamel donne alors (formellement)

$$u(t,x) = G(t,\cdot) * u_0(x) - \int_0^t G(t-s,\cdot) * \partial_x f(u(s,\cdot))(x)\,ds.$$

et, en utilisant les propriétés de la convolution vis-a-vis des dérivées,

$$u(t,x) = G(t,\cdot) * u_0(x) - \int_0^t \partial_x G(t-s,\cdot) * f(u(s,\cdot))(x)\,ds. \tag{4.6}$$

C'est sous cette forme que nous allons chercher une solution de (4.5). Plus précisément :

Définition 4.2 *Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $T > 0$. Une solution de (4.5) (avec $\varepsilon = 1$) sur $]0,T[$ est une fonction $u \in C_b(]0,T[\times\mathbb{R})$ qui vérifie (4.6) pour tout $(t,x) \in]0,T[\times\mathbb{R}^N$.*

Remarque 4.2 *On a (c'est trivial sur la formule qui donne G) $G(t,x) = t^{-1/2}G(1,t^{-1/2}x)$; ainsi, $\partial_x G(t,x) = t^{-1}\partial_x G(1,t^{-1/2}x)$. Toutes les dérivées de $G(1,\cdot)$ étant intégrables sur $\mathbb{R}$ ($G(1,\cdot)$ est une gaussienne !), un changement de variable donne alors*

$$||\partial_x G(t,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})} = t^{-1/2}||\partial_x G(1,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})} = \mathcal{K}_1 t^{-1/2}.$$

Par les inégalités de Young pour la convolution, on en déduit que, lorsque u est bornée sur $]0,T[\times\mathbb{R}$, pour presque tout $s \in]0,t[$,

$$\begin{aligned} ||\partial_x G(t-s,\cdot) * f(u(s,\cdot))||_{L^1(\mathbb{R})} &\le \mathcal{K}_1(t-s)^{-1/2}||f(u(s,\cdot))||_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ &\le \mathcal{K}_1(t-s)^{-1/2}||f(u)||_{L^\infty(]0,T[\times\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Ainsi $(s,x) \to \partial_x G(t-s,\cdot) * f(u(s,\cdot))(x)$ est intégrable sur $]0,t[\times\mathbb{R}$ et tous les termes de (4.6) sont bien définis (le premier l'est car $G(t,\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$).

Puisque (4.6) dit exactement qu'une certaine fonctionnelle en u (le membre de droite) a un point fixe, l'obtention d'une solution, locale en temps pour commencer, à (4.5) se fait naturellement par point fixe contractant.

Théorème 4.1 *Soit $R' > R > 0$. Il existe $T > 0$ ne dépendant que de R et R' tel que, pour tout $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ bornée par R et tout $S \in]0,T]$, (4.5) a une unique solution sur $]0,S[\times\mathbb{R}$ bornée par R'.*

Démonstration du théorème 4.1 :
Nous allons appliquer le point fixe contractant dans $E = C_b(]0,T[\times\mathbb{R})$, pour un T bien choisi. Soit, pour $u \in E$,

$$\psi(u) = G(t,\cdot) * u_0(x) - \int_0^t \partial_x G(t-s,\cdot) * f(u(s,\cdot))(x)\,ds. \tag{4.7}$$

Les considérations de la remarque 4.2 montrent que $\psi(u)$ est bien définie. Qui plus est, les estimations faites dans cette remarque montrent que, pour tout $(t,x) \in]0,T[\times\mathbb{R}$, si u est bornée par R',

$$\begin{aligned} |\psi(t,x)| &\leq ||G(t,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})}||u_0||_{L^\infty(\mathbb{R})} + \mathcal{K}_1 \sup_{[-R',R']}|f| \int_0^t (t-s)^{-1/2}\,ds \\ &\leq ||u_0||_{L^\infty(\mathbb{R})} + 2\sup_{[-R',R']}|f|\mathcal{K}_1 t^{1/2}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Rappelons que, par construction, $G(t,\cdot)$ est positive et

$$||G(t,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} G(t,x)\,dx = \mathcal{F}(G(t,\cdot))(0) = e^{-4\pi^2 t\times 0} = 1.$$

Ainsi, $\psi(u)$ est bornée sur $]0,T[\times\mathbb{R}$. En notant, pour $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, $\widetilde{G}(t,x) = \mathbf{1}_{]0,T[}(t)\partial_x G(t,x) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ (car $||\partial_x G(t,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})} = \mathcal{K}_1 t^{-1/2}$ pour tout $t \in]0,T[$) et $\widetilde{F}(t,x) = \mathbf{1}_{]0,T[}(t) f(u(t,x)) \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, on se rend compte que, pour $(t,x) \in]0,T[\times\mathbb{R}$,

$$\psi(t,x) = G(t,\cdot) * u_0(x) - \widetilde{G} \star F(t,x)$$

où $\star$ représente la convolution en (t,x). Les résultats usuels de convolution montrent que le second terme est continu en (t,x) (convolution d'une fonction de $L^1(\mathbb{R}^2)$ avec une fonction de $L^\infty(\mathbb{R}^2)$), et la continuité sous le signe intégral donne la continuité du premier terme. Ainsi, $\psi(u)$ est une fonction continue bornée : ψ envoie E dans E.

Montrons maintenant que, pour T assez petit, ψ est contractant de la boule de rayon R' de E dans elle-même.
(4.8) prouve que, si on prend $T > 0$ tel que $2\sup_{[-R',R']}|f|T^{1/2} < R' - R$ (ce qui est possible et ne dépend que de R et R'), ψ envoie la boule de rayon R' dans elle-même. Soient maintenant u et v dans cette boule. On a, par l'inégalité des accroissements finis,

$$\begin{aligned} |\psi(u)(t,x) - \psi(v)(t,x)| &= \left|\int_0^t \partial_x G(t-s,\cdot) * (f(u(s,\cdot)) - f(v(s,\cdot))(x)\,ds\right| \\ &\leq \int_0^t ||\partial_x G(t-s,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})} \sup_{[-R',R']}|f'|\,||u(s,\cdot) - v(s,\cdot)||_{L^\infty(\mathbb{R})}\,ds \\ &\leq \mathcal{K}_1 \sup_{[-R',R']}|f'|\,||u-v||_E \int_0^t (t-s)^{-1/2}\,ds \\ &\leq 2\mathcal{K}_1 \sup_{[-R',R']}|f'|t^{1/2}||u-v||_E. \end{aligned} \tag{4.9}$$

En prenant donc $T > 0$ tel que $2\mathcal{K}_1\sup_{[-R',R']}|f'|T^{1/2} < 1$, un tel choix ne dépendant que de R', on constate que ψ est contractante sur la boule de rayon R'.
Il existe donc bien $T > 0$ ne dépendant que de R et R', tel que ψ a un unique point fixe dans la boule de rayon R' dans E. Qui plus est, pour tout $S \leq T$, ψ est encore contractant de la boule de rayon R' de $C_b(]0,S[\times\mathbb{R})$ dans elle-même, ce qui achève de prouver le résultat du théorème. ∎

Corollaire 4.1 *Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Pour tout $T > 0$, il existe au plus une solution de (4.5) sur $]0, T[$.*

Démonstration du corollaire 4.1 :
Soit $T > 0$ et u et v deux solutions de (4.5). Notons

$$T_0 = \sup\{t \in]0, T[\mid u(s, x) = v(s, x) \text{ pour tout } (s, x) \in]0, t[\times\mathbb{R}\}$$

($T_0 = 0$ si l'ensemble dont on prend la borne supérieure est vide) ; si $T_0 = T$, alors u et v coincident sur $]0, T[\times\mathbb{R}$. Supposons donc que $T_0 < T$.
Puisque u et v sont continues, on a $u(T_0, x) = v(T_0, x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (si $T_0 = 0$, cela revient à dire que u et v ont même condition initiale u_0) ; de plus, il n'est pas dur de voir que $u(T_0 + \cdot, \cdot)$ et $v(T_0 + \cdot, \cdot)$ sont solutions de (4.5) sur $]0, T - T_0[$ avec $u(T_0, \cdot)$ comme condition initiale (il suffit d'utiliser les propriétés de semi-groupe de la convolution par G, à savoir $G(t, \cdot) * G(t', \cdot) = G(t + t', \cdot)$, ce qui se prouve par exemple en passant en Fourier).
Soit $R = ||u(T_0, \cdot)||_\infty$ et $R' > \max(R, ||u||_{L^\infty(]0,T[\times\mathbb{R})}, ||v||_{L^\infty(]0,T[\times\mathbb{R})})$. Par le théorème 4.1, on sait qu'il existe $S \in]0, T-T_0[$ tel que (4.5) admet une unique solution bornée par R' sur $]0, S[$ et ayant pour condition initiale $u(T_0, \cdot)$; or $u(T_0 + \cdot, \cdot)$ et $v(T_0 + \cdot, \cdot)$ sont justement deux telles solutions : elles coincident donc sur $]0, S[\times\mathbb{R}$, ce qui montre que u et v coincident sur $]0, T_0 + S[\times\mathbb{R}$ et contredit la définition de T_0. ∎

Supposons maintenant que l'on sache prouver que la solution de (4.5) sur n'importe quel intervalle est bornée par la norme infinie de la condition initiale. Prenons $R = ||u_0||_\infty$, $R' > R$ quelconque et $T > 0$ ne dépendant que de R et R' donné par le théorème 4.1.
On sait qu'il existe une solution sur $]0, T[$ de (4.5). Si cette solution est bornée par $R = ||u_0||_\infty$, alors on peut partir de $u(T/2, \cdot)$, bornée par R, comme condition initiale et trouver une solution de (4.5) sur $]T/2, 3T/2[$; l'unicité donnée par i) montre que cette solution coincide avec u sur $]T/2, T[\times\mathbb{R}$ et étend donc u en une solution de (4.5) sur $]0, 3T/2[$ (il n'est pas très dur, toujours grâce aux propriétés de la convolution par G, de voir que la fonction ainsi créée sur $]0, 3T/2[\times\mathbb{R}$ comme recollement de deux solutions est effectivement une solution). On peut alors à nouveau partir de $u(T, \cdot)$ comme condition initiale, toujours bornée par R par hypothèse, et étendre u en une solution sur $]0, 2T[$.
Ainsi, de proche en proche, on va créer une solution sur $]0, \infty[$ en entier, pourvu que l'on sache *a priori* que les solutions de (4.5) sont bornées par la norme infinie de la condition initiale. Nous verrons plus loin que c'est effectivement le cas.

4.5.2 Régularité, condition initiale

Il est bien connu que le noyau de la chaleur a un effet régularisant : on peut voir par simple dérivation sous l'intégrale que $(t, x) \to G(t, \cdot) * u_0(x)$ est C^∞ sur $]0, \infty[\times\mathbb{R}$, et ce même si u_0 n'est que dans $L^\infty(\mathbb{R})$. On peut alors légitimement se demander si (4.5) a aussi un effet régularisant : est-ce que la solution qu'on a obtenue (sous forme "faible" (4.6)) est effectivement régulière, et solution classique de l'EDP ? La réponse est oui, mais c'est un peu plus délicat à prouver que dans le cas de la simple équation de la chaleur ; en effet, si on tente d'appliquer la dérivation sous le signe intégral au deuxième terme du membre de droite de (4.6), on va se retrouver devant

$$\int_0^t \partial_x^2 G(t - s, \cdot) * f(u(s, \cdot))(x)\, ds \tag{4.10}$$

et la seule estimation que l'on a sur $\partial_x^2 G$ est la suivante (toujours obtenue par les propriétés d'homogénéité de G) :

$$||\partial_x^2 G(\tau, \cdot)||_{L^1(\mathbb{R})} = \tau^{-3/2} ||\partial_x^2 G(1, \tau^{-1/2} \cdot)||_{L^1(\mathbb{R})} = \tau^{-1} ||\partial_x^2 G(1, \cdot)||_{L^1(\mathbb{R})}.$$

La fonction $\tau \to ||\partial_x^2 G(\tau, \cdot)||_{L^1(\mathbb{R})}$ n'est donc pas intégrable près de 0, et on ne peut appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale ((4.10) n'a pas de sens en général).
Il faut aborder le probème de manière différente : comme on ne peut mettre deux dérivées sur le noyau dans le dernier terme de (4.6), il faut d'abord prouver que u est C^1 en espace, pour pouvoir mettre une dérivée dessus et "libérer" une dérivée sur le noyau, puis à partir de là prouver que u est C^2 en espace, etc... Bref, la preuve complète fait intervenir une technique de bootstrap assez lourde, bien que mécanique, et nous ne la ferons pas ; le lecteur intéressé pourra la trouver dans [6] (pour un opérateur un peu plus général que celui de la chaleur) ou dans [11] (dans le cadre plus général des systèmes, mais sans le passage au global).

L'idée pour montrer que u est C^1 en espace est cependant assez simple ; on constate en effet que

$$||\partial_x(G(t,\cdot)*u_0)||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq ||\partial_x G(t,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})}||u_0||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \mathcal{K}_1||u_0||_{L^\infty(\mathbb{R})}\, t^{-1/2}.$$

Ainsi, la dérivée spatiale du premier terme du membre de droite de (4.6) explose au pire comme $t^{-1/2}$ près de 0. Cela suggère qu'il faut chercher la solution dans l'espace de Banach

$$\mathcal{E} = \{u \in C_b(]0,T[\times\mathbb{R}) \mid (t,x) \to t^{1/2}\partial_x u(t,x) \text{ est bornée sur }]0,T[\times\mathbb{R}\}$$

muni de sa norme naturelle $||u||_{L^\infty(]0,T[\times\mathbb{R})} + ||t^{1/2}\partial_x u||_{L^\infty(]0,T\times\mathbb{R})}$.
On reprend alors la preuve du théorème 4.1 en appliquant un point fixe contractant pour ψ dans $\mathcal{E}$ (il faut donc estimer, lorsque u est dans $\mathcal{E}$, les dérivées spatiales de $\psi(u)$, ce qui peut se faire en mettant la dérivée dans le deuxième terme de ψ sur $f(u)$, et les estimations d'explosion en $t^{-1/2}$ que l'on a sur $\partial_x G$ et $\partial_x u$ permettent d'estimer effectivement $\partial_x\psi(u)$). Cela prouve l'existence d'une solution à (4.5) dans $\mathcal{E}$, c'est-à-dire d'une solution C^1 en espace, et par unicité dans E de cette solution, cela montre donc que la solution continue bornée que l'on avait trouvée est en fait C^1 en espace.
Pour obtenir davantage de régularité spatiale, il faut ensuite considérer les équations satisfaites par les dérivées spatiales de u (qui sont grosso-modo de la même forme que (4.6)) et appliquer à nouveau des points fixes dans $\mathcal{E}$ pour ces équations.
Une fois que l'on sait que u est régulière en espace, il faut manipuler (4.6) pour voir que u est dérivable en temps et vérifie l'EDP de (4.5), ce qui donne alors immédiatement la régularité en temps.

Le résultat que l'on obtient alors est le suivant.

Théorème 4.2 *Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $T > 0$ ou $T = \infty$. Toute solution de (4.5) sur $]0,T[$ est C^∞ sur $]0,T[\times\mathbb{R}$ et, pour tout $t_0 > 0$, a toutes ses dérivées bornées sur $[t_0,T[\times\mathbb{R}$. De plus, elle vérifie l'équation aux dérivées partielles de (4.5) au sens classique.*

Bien sûr, en général, il n'y a aucun espoir que les dérivées soient bornées jusqu'en $t = 0$ (du moins si u_0 n'est pas régulière).

Il reste à voir comment la condition initiale est récupérée à partir de (4.6).

Théorème 4.3 *Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et u une solution de (4.5) sur $]0,T[$. Alors $u(t,\cdot) \to u_0$ lorsque $t \to 0$, dans L^∞ faible-$*$ et dans $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ pour tout $p < \infty$.*

Démonstration du théorème 4.3 :
Par les majorations faites dans (4.8) et en notant R' un majorant de u, on a

$$|u(t,x) - G(t,\cdot)*u_0(x)| \leq 2\mathcal{K}_1 \sup_{[-R',R']} |f|\, t^{1/2}$$

donc $u(t,\cdot) - G(t,\cdot)*u_0 \to 0$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$ (fortement) lorsque $t \to 0$. Il est connu que $G(t,\cdot)$ est, lorsque $t \to 0$, une approximation de l'unité, et on peut donc aisément voir (exercice presque classique) que $G(t,\cdot)*u_0 \to u_0$, lorsque $t \to 0$, dans L^∞ faible-$*$ et dans $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ pour tout $p < \infty$. ■

4.5.3 Inégalité entropique, estimation L^∞

Nous reprenons ici $\varepsilon > 0$ quelconque et notons u^ε la solution à (4.5). Nous allons maintenant montrer ce qui nous manque pour s'assurer que u^ε est une solution globale à (4.5) : à savoir que les solutions de (4.5) sont bornées par un majorant de la condition initiale. Nous ne ferons cette preuve que dans le cas où la condition initiale est dans $W^{2,1}(\mathbb{R})$ (voir les quelques résultats techniques en annexe, section 4.9, concernant la solution de (4.5) dans ce cas) ; c'est clairement restrictif par rapport à ce qui peut être fait en général, mais comme nous l'avons déjà indiqué, nous ne cherchons pas à faire une étude précise de (4.5), juste à obtenir le minimum qui nous permettra de prouver l'existence d'une "bonne" solution à (4.1).

Soit η une fonction convexe régulière ; prenons ϕ une fonction telle que $\phi' = \eta' f'$. On a, par convexité de η,

$$\Delta(\eta(u^\varepsilon)) = \eta''(u^\varepsilon)|\nabla u^\varepsilon|^2 + \eta'(u^\varepsilon)\Delta u^\varepsilon \geq \eta'(u^\varepsilon)\Delta u^\varepsilon$$

Puisque u^ε est solution classique de l'EDP de (4.5), on en déduit, en multipliant cette équation par $\eta'(u^\varepsilon)$:

$$\partial_t(\eta(u^\varepsilon)) + \partial_x(\phi(u^\varepsilon)) - \varepsilon\Delta(\eta(u^\varepsilon)) \leq 0. \tag{4.11}$$

Cette inégalité, dite "inégalité d'entropie", est non-seulement utile pour prouver une estimation sur les solutions de (4.5), mais elle sera aussi et surtout cruciale pour obtenir une bonne notion de solution à (4.1), notion plus forte que celle de solution faible et qui nous assurera l'unicité de la solution.

Supposons maintenant que $\eta(0) = 0$; on choisit ϕ la primitive de $\eta' f'$ telle que $\phi(0) = 0$. Soient $0 < t_1 < t_2$; en intégrant (4.11) entre t_1 et t_2 en temps, on trouve

$$\eta(u^\varepsilon(t_2,x)) - \eta(u^\varepsilon(t_1,x)) \leq \int_{t_1}^{t_2} \partial_x(\varepsilon\partial_x(\eta(u^\varepsilon)) - \phi(u^\varepsilon))(s,x)\,ds. \tag{4.12}$$

Notons $\Psi(s,x) = \varepsilon\partial_x(\eta(u^\varepsilon(s,x))) - \phi(u^\varepsilon(s,x))$. Comme toutes les fonctions sont régulières ici, on peut utiliser Fubini pour trouver, lorsque $M > 0$,

$$\int_{-M}^{M}\int_{t_1}^{t_2} \partial_x(\varepsilon\partial_x(\eta(u^\varepsilon)) - \phi(u^\varepsilon))(s,x)\,ds\,dx = \int_{t_1}^{t_2}\int_{-M}^{M} \partial_x\Psi(s,x)\,dx\,ds.$$

Or

$$\begin{aligned}\int_{-M}^{M} \partial_x\Psi(s,x)\,dx &= \Psi(s,M) - \Psi(s,-M)\\ &= \varepsilon\eta'(u^\varepsilon(s,M))\partial_x u^\varepsilon(s,M) - \phi(u^\varepsilon(s,M))\\ &\quad -\varepsilon\eta'(u^\varepsilon(s,-M))\partial_x u^\varepsilon(s,-M) + \phi(u^\varepsilon(s,-M)) \to 0\end{aligned}$$

lorsque $M \to \infty$ ($u^\varepsilon(t,\cdot)$ et $\partial_x u^\varepsilon(t,\cdot)$ tendent vers 0 à l'infini, par le corollaire 4.2). Qui plus est, cette fonction est majorée indépendamment de $s \in [t_1,t_2]$ et M (u^ε et sa dérivée spatiales sont bornées sur $[t_1,t_2]\times\mathbb{R}$) ; la convergence dominée donne donc

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{-M}^{M} \partial_x\Psi(s,x)\,dx\,ds \to 0 \quad \text{lorsque } M \to \infty.$$

De plus, $\eta(u^\varepsilon(t,\cdot)) \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout $t > 0$ (en effet, en notant R' un majorant de u^ε, puisque $\eta(0) = 0$, on a $|\eta(u^\varepsilon)| \leq \sup_{[-R',R']}|\eta'|\,|u^\varepsilon|$ et cette fonction est intégrable en espace, pour tout temps, par le corollaire 4.2). Donc on peut intégrer (4.12) sur $[-M,M]$ puis passer à la limite $M \to \infty$ pour trouver

$$\int_{\mathbb{R}} \eta(u^\varepsilon(t_2,x))\,dx \leq \int_{\mathbb{R}} \eta(u^\varepsilon(t_1,x))\,dx$$

pour tous $0 < t_1 < t_2$. Par le corollaire 4.2, on peut passer à la limite $t_1 \to 0$ dans cette estimation (vu que u^ε est bornée, $|\eta(u^\varepsilon(t_1,\cdot)) - \eta(u_0)| \leq C|u^\varepsilon(t_1,\cdot) - u_0| \to 0$ dans $L^1(\mathbb{R})$ lorsque $t_1 \to 0$) pour obtenir, dès que η est convexe régulière nulle en 0 et $t_2 > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} \eta(u^\varepsilon(t_2,x))\,dx \leq \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x))\,dx. \tag{4.13}$$

L'estimation L^∞ est alors immédiate : on prend η de la forme où R est un majorant de u_0. Le membre de droite de (4.13) est alors nul, ce qui force $\eta(u^\varepsilon(t_2,x))=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ (puisque $\eta\geq 0$), c'est-à-dire $-R\leq u^\varepsilon(t_2,x)\leq R$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $t_2>0$. On a prouvé le

Théorème 4.4 *Si $u_0\in W^{2,1}(\mathbb{R})$ et u^ε est la solution de (4.5) sur $]0,T[\times\mathbb{R}$, alors*

$$||u^\varepsilon||_{L^\infty(]0,T[\times\mathbb{R})}\leq ||u_0||_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Par le raisonnement en fin de la sous-section 4.5.1 concernant l'existence et l'unicité d'une solution à l'approximation parabolique, on peut donc assurer, modulo une condition initiale un peu régulière, que la solution de (4.5) existe sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}$.

4.5.4 Estimations de compacité

Afin de passer à la limite $\varepsilon\to 0$, une simple borne sur la fonction ne suffit pas puisque le terme $f(u^\varepsilon)$ est non-linéaire. Nous allons montrer ici, lorsque la condition initiale est régulière, des estimations (indépendantes de ε) sur les dérivées de u^ε qui donneront la compacité suffisante pour passer à la limite.

En dérivant l'équation par rapport à x, on a

$$\partial_t(\partial_x u^\varepsilon)+f''(u^\varepsilon)(\partial_x u^\varepsilon)^2+f'(u^\varepsilon)\partial_x^2 u^\varepsilon-\varepsilon\Delta(\partial_x u^\varepsilon)=0.$$

On multiplie ceci par $I_n'(\partial_x u^\varepsilon)$, où I_n est une approximation (quand $n\to\infty$) convexe régulière de la valeur absolue (I_n' approche donc la fonction signe) :

Comme précédemment, on a $\Delta(I_n(\partial_x u^\varepsilon))\geq I_n'(\partial_x u^\varepsilon)\Delta(\partial_x u^\varepsilon)$ et on trouve donc

$$\partial_t(I_n(\partial_x u^\varepsilon))+f''(u^\varepsilon)(\partial_x u^\varepsilon)^2 I_n'(\partial_x u^\varepsilon)+f'(u^\varepsilon)\partial_x^2 u^\varepsilon I_n'(\partial_x u^\varepsilon)-\varepsilon\Delta(I_n(\partial_x u^\varepsilon))\leq 0.$$

On intègre alors, comme avant, entre t_1 et t_2 strictement positifs puis entre $-M$ et M :

$$\begin{aligned}\int_{-M}^{M} I_n(\partial_x u^\varepsilon(t_2,x))\,dx- & \int_{-M}^{M} I_n(\partial_x u^\varepsilon(t_1,x))\,dx \\ & \leq \int_{t_1}^{t_2}\int_{-M}^{M} \varepsilon\Delta(I_n(\partial_x u^\varepsilon))(s,x)\,dsdx \qquad (4.14)\\ & \quad -\int_{t_1}^{t_2}\int_{-M}^{M} f''(u^\varepsilon(s,x))(\partial_x u^\varepsilon(s,x))^2 I_n'(\partial_x u^\varepsilon(s,x))\,dsdx \\ & \quad -\int_{t_1}^{t_2}\int_{-M}^{M} f'(u^\varepsilon(s,x))\partial_x(I_n(\partial_x u^\varepsilon))(s,x)\,dsdx. \qquad (4.15)\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}\int_{-M}^{M}\Delta(I_n(\partial_x u^\varepsilon))(s,x)\,dx &= \partial_x(I_n(\partial_x u^\varepsilon))(s,M)-\partial_x(I_n(\partial_x u^\varepsilon))(s,-M)\\ &= I_n'(\partial_x u^\varepsilon(s,M))\partial_x^2 u^\varepsilon(s,M)-I_n'(\partial_x u^\varepsilon(s,-M))\partial_x^2 u^\varepsilon(s,-M)\end{aligned}$$

qui tend vers 0 lorsque $M\to\infty$ (voir le corollaire 4.2 et les bornes que l'on a sur les dérivées de u^ε). De plus, cette fonction est majorée indépendamment de $s\in[t_1,t_2]$ et de M (bornes sur les dérivées de u^ε). Par convergence dominée, (4.14) tend donc vers 0 quand $n\to\infty$.
Par intégration par parties, on trouve

$$\begin{aligned}\int_{-M}^{M} & f'(u^\varepsilon(s,x))\partial_x(I_n(\partial_x u^\varepsilon))(s,x)\,dx\\ &= f'(u^\varepsilon(s,M))I_n(\partial_x u^\varepsilon(s,M))-f'(u^\varepsilon(s,-M))I_n(\partial_x u^\varepsilon(s,-M))\\ &\quad -\int_{-M}^{M} f''(u^\varepsilon(s,x))I_n(\partial_x u^\varepsilon(s,x))\partial_x u^\varepsilon(s,x)\,dx.\end{aligned}$$

Les deux premiers termes du membre de droite tendent vers 0 quand M tend vers l'infini, donc

$$\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M} f'(u^\varepsilon(s,x))\partial_x(I_n(\partial_x u^\varepsilon))(s,x)\,dx=\lim_{M\to\infty}-\int_{-M}^{M} f''(u^\varepsilon(s,x))I_n(\partial_x u^\varepsilon(s,x))\partial_x u^\varepsilon(s,x)\,dx.$$

Qui plus est, les fonctions $f'(u^\varepsilon)I_n(\partial_x u^\varepsilon)$ et $f''(u^\varepsilon)I_n(\partial_x u^\varepsilon)\partial_x u^\varepsilon$ sont intégrables sur $[t_1,t_2]\times\mathbb{R}$ (car u^ε et $\partial_x u^\varepsilon$ sont bornées, $|I_n|\leq|\cdot|$ et $\partial_x u^\varepsilon$ est intégrable sur ce domaine par le corollaire 4.2). On a donc

$$\lim_{M\to\infty}\int_{t_1}^{t_2}\int_{-M}^{M} f'(u^\varepsilon(s,x))\partial_x(I_n(\partial_x u^\varepsilon))(s,x)\,dsdx=-\int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathbb{R}} f''(u^\varepsilon(s,x))I_n(\partial_x u^\varepsilon(s,x))\partial_x u^\varepsilon(s,x)\,dsdx.$$

La fonction $f''(u^\varepsilon)(\partial_x u^\varepsilon)^2 I_n'(\partial_x u^\varepsilon)$ est aussi intégrable sur $[t_1,t_2]\times\mathbb{R}$ (u^ε et $\partial_x u^\varepsilon$ sont bornées, et $\partial_x u^\varepsilon$ est intégrable sur ce domaine). De même, puisque $|I_n|\leq|\cdot|$, $I_n(\partial_x u^\varepsilon(t,\cdot))$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout $t>0$. On peut donc passer à la limite $M\to\infty$ dans (4.15) pour trouver

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} & I_n(\partial_x u^\varepsilon(t_2,x))\,dx-\int_{\mathbb{R}} I_n(\partial_x u^\varepsilon(t_1,x))\,dx\\ &\leq \int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathbb{R}} f''(u^\varepsilon(s,x))\partial_x u^\varepsilon(s,x)(I_n(\partial_x u^\varepsilon(s,x))-\partial_x u^\varepsilon(s,x)I_n'(\partial_x u^\varepsilon(s,x)))\,dsdx.\end{aligned}$$

Mais $I_n(r)-rI_n'(r)\to 0$ lorsque $n\to\infty$ ($I_n(r)\to|r|$ et $I_n'(r)\to\mathrm{sgn}(r)$), en étant majorée par $2|\cdot|$ (I_n' est majorée par 1 en valeur absolue). Ainsi $I_n(\partial_x u^\varepsilon)-\partial_x u^\varepsilon I_n'(\partial_x u^\varepsilon)\to 0$ en étant dominée par $2|\partial_x u^\varepsilon|$ qui est intégrable sur $[t_1,t_2]\times\mathbb{R}$. Puisque u^ε et $\partial_x u^\varepsilon$ sont bornées, la convergence dominée sur les membres de droite et de gauche de la dernière inégalité permet d'aboutir à

$$\int_{\mathbb{R}}|\partial_x u^\varepsilon(t_2,x)|\,dx\leq\int_{\mathbb{R}}|\partial_x u^\varepsilon(t_1,x)|\,dx \qquad (4.16)$$

dès que $t_1<t_2$. Le corollaire 4.2 permet alors de passer à la limite $t_1\to 0$ pour trouver

$$||\partial_x u^\varepsilon(t_2,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})}\leq||\partial_x u_0||_{L^1(\mathbb{R})}.$$

C'est le premier bout de l'estimation annoncée (estimation sur les dérivées spatiales).

La technique pour estimer $\partial_t u^\varepsilon$ est similaire. On commence par dériver l'équation pour trouver

$$\partial_t(\partial_t u^\varepsilon) + f''(u^\varepsilon)\partial_t u^\varepsilon \partial_x u^\varepsilon + f'(u^\varepsilon)\partial_t\partial_x u^\varepsilon - \varepsilon\Delta(\partial_t u^\varepsilon) = 0.$$

On multiplie ensuite par $I'_n(\partial_t u^\varepsilon)$ et comme précédemment :

$$\partial_t(I_n(\partial_t u^\varepsilon)) + f''(u^\varepsilon)\partial_x u^\varepsilon \partial_t u^\varepsilon I'_n(\partial_t u^\varepsilon) + f'(u^\varepsilon)\partial_x\partial_t u^\varepsilon I'_n(\partial_t u^\varepsilon) - \varepsilon\Delta(I_n(\partial_t u^\varepsilon)) \leq 0.$$

Puis on intègre sur $[t_1, t_2] \times [-M, M]$:

$$\begin{aligned}\int_{-M}^{M} I_n(\partial_t u^\varepsilon(t_2, x))\, dx - &\int_{-M}^{M} I_n(\partial_t u^\varepsilon(t_1, x))\, dx \\ \leq\ & \int_{t_1}^{t_2}\int_{-M}^{M} \varepsilon\Delta(I_n(\partial_t u^\varepsilon))(s, x)\, dsdx \qquad (4.17)\\ &-\int_{t_1}^{t_2}\int_{-M}^{M} f''(u^\varepsilon(s,x))\partial_x u^\varepsilon(s,x)\partial_t u^\varepsilon(s,x) I'_n(\partial_t u^\varepsilon(s,x))\, dsdx \\ &-\int_{t_1}^{t_2}\int_{-M}^{M} f'(u^\varepsilon(s,x))\partial_x(I_n(\partial_t u^\varepsilon))(s,x)\, dsdx. \qquad (4.18)\end{aligned}$$

On constate que, comme $\partial_t u^\varepsilon = \varepsilon\partial_x^2 u^\varepsilon - f'(u^\varepsilon)\partial_x u^\varepsilon$, le corollaire 4.2 entraine que $\partial_t u^\varepsilon(t, x) \to 0$ lorsque $x \to \pm\infty$, pour tout $t > 0$. Ainsi, le terme venant du laplacien se traite comme pour l'estimation sur $\partial_x u^\varepsilon$:

$$\begin{aligned}\int_{-M}^{M} \Delta(I_n(\partial_t u^\varepsilon))(s, x)\, dx &= \partial_x(I_n(\partial_t u^\varepsilon))(s, M) - \partial_x(I_n(\partial_t u^\varepsilon))(s, -M) \\ &= I'_n(\partial_t u^\varepsilon(s, M))\partial_x\partial_t u^\varepsilon(s, M) - I'_n(\partial_t u^\varepsilon(s, -M))\partial_x\partial_t u^\varepsilon(s, -M) \to 0\end{aligned}$$

lorsque $M \to \infty$ — on suppose ici par exemple que $I'_n(0) = 0$, ce qui est un choix naturel d'approximation, et on utilise le fait que $\partial_t u^\varepsilon(s, \pm M) \to 0$ lorsque $M \to \infty$ et que toutes les dérivées de u^ε sont bornées loin de $t = 0$ — en étant majoré indépendamment de $s \in [t_1, t_2]$ et de M. La convergence dominée donne donc une limite nulle pour (4.17) lorsque $M \to \infty$.
Les mêmes manipulations qu'avant, justifiées par le fait que les termes de bord tendent vers 0 lorsque $M \to \infty$ et que les fonctions considérées sont intégrables, donnent

$$\lim_{M\to\infty}\int_{t_1}^{t_2}\int_{-M}^{M} f'(u^\varepsilon(s,x))\partial_x(I_n(\partial_t u^\varepsilon))(s,x)\, dxds = -\int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathbb{R}} f''(u^\varepsilon(s,x))\partial_x u^\varepsilon(s,x) I_n(\partial_t u^\varepsilon(s,x))\, dxds.$$

On peut donc passer à la limite dans (4.18) et trouver

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} I_n(\partial_t u^\varepsilon(t_2, x))\, dx - &\int_{\mathbb{R}} I_n(\partial_t u^\varepsilon(t_1, x))\, dx \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathbb{R}} f''(u^\varepsilon(s,x))\partial_x u^\varepsilon(s,x)\left(I_n(\partial_t u^\varepsilon(s,x)) - \partial_t u^\varepsilon(s,x) I'_n(\partial_t u^\varepsilon(s,x))\right) dsdx.\end{aligned}$$

Comme avant, le terme de droite tend vers 0 lorsque $n \to \infty$ et on obtient donc

$$\int_{\mathbb{R}} |\partial_t u^\varepsilon(t_2, x)|\, dx \leq \int_{\mathbb{R}} |\partial_t u^\varepsilon(t_1, x)|\, dx. \tag{4.19}$$

L'équation $\partial_t u^\varepsilon = \varepsilon\Delta u^\varepsilon - f'(u^\varepsilon)\partial_x u^\varepsilon$ nous montre que

$$||\partial_t u^\varepsilon(t, \cdot)||_{L^1(\mathbb{R})} \leq \varepsilon||\Delta u^\varepsilon(t, \cdot)||_{L^1(\mathbb{R})} + C_4||\partial_x u^\varepsilon(t, \cdot)||_{L^1(\mathbb{R})}$$

où C_4 ne dépend que de la borne que l'on a sur u^ε (c'est à dire de la borne infinie de la condition initiale, pas de ε) ; on peut alors passer à la limite supérieure quand $t \to 0$ pour trouver, grâce au corollaire 4.2,

$$\limsup_{t\to 0} ||\partial_t u^\varepsilon(t, \cdot)||_{L^1(\mathbb{R})} \leq \varepsilon||\partial_x^2 u_0||_{L^1(\mathbb{R})} + C_4||\partial_x u_0||_{L^1(\mathbb{R})} \leq C_5$$

avec C_5 indépendant de $\varepsilon\in]0,1[$. Reporté dans (4.19) dans lequel on a pris la limite supérieure lorsque $t_1\to 0$, ceci nous donne une estimation indépendante de ε sur $\partial_t u^\varepsilon$.

Pour résumer les estimations obtenues :

Théorème 4.5 *Si $u_0\in W^{2,1}(\mathbb{R})$ alors il existe K_0 indépendant de $\varepsilon\in]0,1[$ tel que la solution de (4.5) vérifie*

$$||u^\varepsilon||_{L^\infty(]0,\infty[\times\mathbb{R})}\le ||u_0||_{L^\infty(\mathbb{R})}\,,\quad ||\partial_x u^\varepsilon||_{L^\infty(]0,\infty[;L^1(\mathbb{R}))}\le K_0\quad \text{et}\quad ||\partial_t u^\varepsilon||_{L^\infty(]0,\infty[;L^1(\mathbb{R}))}\le K_0.$$

En particulier, $(u^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1[}$ est bornée dans $W^{1,1}(]0,T[\times]-M,M[)$ pour tout $T>0$ et tout $M>0$.

4.6 Solution entropique pour les lois de conservation scalaires

4.6.1 Définition, existence pour une condition initiale régulière

Le passage à la limite sur les solutions de (4.5) est maintenant trivial. Toujours pour $u_0\in W^{2,1}(\mathbb{R})$, on repart de (4.11) (dans lequel on rappelle que η est n'importe quelle fonction convexe régulière et que $\phi'=\eta' f'$), que l'on multiplie par $\varphi\in C_c^\infty([0,\infty[\times\mathbb{R})$ positive ; on intègre entre $[t_1,\infty[\times\mathbb{R}$ pour un $t_1>0$ et on trouve donc, après intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^\infty\int_{\mathbb{R}}\eta(u^\varepsilon(t,x))\partial_t\varphi(t,x)+\phi(u^\varepsilon(t,x))\partial_x\varphi(t,x)\,dtdx+\int_{\mathbb{R}}\eta(u^\varepsilon(t_1,x))\varphi(t_1,x)\,dx&\\ \ge\ -\varepsilon\int_{t_1}^\infty\int_{\mathbb{R}}\eta(u^\varepsilon(t,x))\Delta\varphi(t,x)\,dtdx.&\end{aligned}$$

On a vu que $\eta(u^\varepsilon(t_1,\cdot))\to\eta(u_0)$ dans $L^1(\mathbb{R})$, lorsque $t_1\to 0$. On peut donc passer à la limite $t_1\to 0$ (les fonctions que l'on intègre sont bien intégrables sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}$ puisque le support de φ coupe les zones infinies en t et x, et toutes les fonctions sont bornées) pour trouver

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}\eta(u^\varepsilon(t,x))\partial_t\varphi(t,x)+\phi(u^\varepsilon(t,x))\partial_x\varphi(t,x)\,dtdx+\int_{\mathbb{R}}\eta(u_0)\varphi(0,x)\,dx&\\ \ge\ -\varepsilon\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}\eta(u^\varepsilon(t,x))\Delta\varphi(t,x)\,dtdx.&\end{aligned}\tag{4.20}$$

Par le théorème 4.5 et le théorème de Rellich, on peut supposer, quitte à extraire une suite, que $u^\varepsilon\to u$ presque partout sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}$ lorsque $\varepsilon\to 0$, où $u\in L^\infty(]0,\infty[\times\mathbb{R})$. Comme $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^\infty(]0,\infty[\times\mathbb{R})$, on a

$$\left|\varepsilon\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}\eta(u^\varepsilon(t,x))\Delta\varphi(t,x)\,dtdx\right|\le C\varepsilon||\Delta\varphi||_{L^1(]0,\infty[\times\mathbb{R})}\to 0\quad\text{lorsque }\varepsilon\to 0.$$

On peut alors passer à la limite $\varepsilon\to 0$ dans (4.20), par convergence dominée (toujours en utilisant la borne L^∞ sur u^ε, ainsi que le fait que les intégrales que l'on considère ne portent que sur le support de φ), et on peut conclure cette partie par une définition et une proposition.

Définition 4.3 *u est une solution entropique de (4.1) si : $u\in L^\infty(]0,\infty[\times\mathbb{R})\cap C([0,\infty[;L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}))$ et, pour tout $\varphi\in C_c^\infty([0,\infty[\times\mathbb{R})$ positive, pour tout η convexe régulière et tout ϕ tel que $\phi'=\eta' f'$,*

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}\eta(u(t,x))\partial_t\varphi(t,x)+\phi(u(t,x))\partial_x\varphi(t,x)\,dtdx+\int_{\mathbb{R}}\eta(u_0(x))\varphi(0,x)\,dx\ge 0.$$

Un couple (η,ϕ) tel que η est convexe et $\phi'=\eta' f'$ est appelé "couple entropie-flux".

Remarque 4.3 *i) Une solution entropique est une solution faible : en considérant successivement $\eta(s)=s$ et $\eta(s)=-s$ comme fonctions convexes, on prouve (4.2) lorsque φ est positive. En écrivant ensuite que toute fonction φ régulière à support compact est différence de deux fonctions positives régulières (par exemple, considérer $\varphi=||\varphi||_\infty\theta-(||\varphi||_\infty\theta-\varphi)$ où θ est régulière à support compact, positive et égale à 1 sur le support de φ), on achève de montrer qu'une solution entropique est solution faible.*

ii) La réciproque est fausse : en effet, nous verrons que la solution entropique est unique, tandis qu'on a déjà montré qu'il pouvait y avoir plusieurs solutions faibles en général.

iii) Si u est une solution classique de (4.5), alors en multipliant l'équation par $\eta'(u)$ on trouve $\partial_t(\eta(u)) + \partial_x(\phi(u)) = 0$, et en multipliant par une fonction-test et en intégrant par parties, on voit que u est aussi solution entropique, qui plus est sans perte d'entropie : l'inégalité dans la formulation entropique est en fait une égalité (et est valable y compris quand les fonctions-test ne sont pas positives).

iv) Si u est une solution entropique, en prenant $\varphi(t,x) = \int_t^{+\infty} \theta_\nu(s)\,ds\,\gamma(x)$ où $(\theta_\nu)_{\nu\to 0}$ est une approximation de l'unité (décentrée sur $]0,\infty[$), on retrouve sans grande difficulté (grâce à la continuité à valeurs L^1_{loc} de la solution entropique) que $u(0,x) = u_0(x)$.

v) On peut en fait se débarrasser de la condition de continuité à valeurs $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ sur la solution entropique, l'équation permet de la retrouver.

Proposition 4.1 *Si $u_0 \in W^{2,1}(\mathbb{R})$, alors il existe au moins une solution entropique à (4.1), qui est bornée par $||u_0||_\infty$ et est dans $C([0,\infty[;L^1(\mathbb{R}))$.*

Démonstration de la proposition 4.1 :
Tout a quasiment été fait, il ne reste plus qu'à voir que la solution obtenue est dans $C([0,\infty[;L^1(\mathbb{R}))$. Ceci est assez immédiat grâce à l'estimation sur $\partial_t u^\varepsilon$ du théorème 4.5.
Pour tous $0 < t_1 < t_2$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |u^\varepsilon(t_1,x) - u^\varepsilon(t_2,x)|\,dx &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{t_1}^{t_2} \partial_t u^\varepsilon(s,x)\,ds \right| dx \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}} |\partial_t u^\varepsilon(s,x)|\,dx\,ds \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} K_0\,ds = K_0(t_2 - t_1) \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

où K_0, qui ne dépend pas de $\varepsilon \in]0,1[$, est donné par le théorème 4.5.
On sait que $u^\varepsilon \to u$ presque partout sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}$; donc, pour presque tout $t > 0$, $u^\varepsilon(t,\cdot) \to u(t,\cdot)$ presque partout sur $\mathbb{R}$. Fatou permet de passer à la limite, pour presque tous $t_1 < t_2$, dans l'inégalité précédente, et donne donc

$$||u(t_1,\cdot) - u(t_2,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})} \leq C_5(t_2 - t_1) \quad \text{pour presque tous } 0 < t_1 < t_2.$$

Cela signifie donc que, quitte à modifier u sur un ensemble de mesure nulle en temps, cette fonction est uniformément continue sur $]0,\infty[$ à valeurs dans $L^1(\mathbb{R})$, et se prolonge en une application continue $[0,\infty[\to L^1(\mathbb{R})$. ■

Remarque 4.4 *Vu l'uniforme continuité (4.21) de $u^\varepsilon : [0,\infty[\to L^1(\mathbb{R})$ et le fait que, pour tout $t \geq 0$, $(u^\varepsilon(t))_{\varepsilon\in]0,1[}$ reste dans un compact de $L^1([M,M])$ pour tout $M > 0$ (théorème 4.5 et théorème de Rellich), la convergence à une sous-suite près de u^ε vers une solution entropique de (4.1) est aussi valable dans $C([0,T];L^1([-M,M]))$ pour tout $M > 0$ (théorème d'Ascoli). Cela permet de voir plus simplement que dans la remarque 4.3 que la valeur initiale de la solution entropique qu'on a construit est effectivement u_0 (tout simplement parce que chaque u^ε vaut u_0 en $t = 0$, voir le théorème 4.3).*
On pourra aussi consulter le théorème 4.9 à propos de cette convergence.

Ce résultat d'existence n'est que partiel : il demande beaucoup trop de régularité sur la condition initiale ; en particulier, u_0 doit être C^1. Mais cette proposition fournit cependant une solution globale en temps, ce que la méthode des caractéristiques ne parvenait pas à faire. Cependant, nous verrons après avoir traité de l'unicité qu'on va pouvoir grandement améliorer ce résultat.

4.6.2 Propagation à vitesse finie, existence et unicité de la solution entropique pour toute condition initiale bornée

Nous allons montrer ici que, pour tout $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, il existe au plus une solution entropique à (4.5). En fait, nous allons faire un peu mieux que ca : nous allons prendre deux conditions initiales bornées u_0 et v_0, une solution entropique u et v pour chaque condition initiale, et nous allons comparer $u - v$ en terme de $u_0 - v_0$.

Idée de la preuve

La fonction convexe qui intervient dans la définition de "solution entropique" est supposée régulière ; cependant, on peut sans trop de problème voir que des fonctions $\eta_k(s) = |s - k|$, associées à des flux $\phi_k(s) = f(\max(s, k)) - f(\min(s, k))$ (on a bien $\phi_k(s) = \int_k^s \eta_k' f'$), sont encore valables : il suffit par exemple d'approcher uniformément de telles fonctions convexes par des fonctions convexes régulières, via un processus de convolution par exemple, et de passer à la limite dans les formulations à partir de ces fonctions convexes régulières.
On a donc, pour tout k réel et tout φ régulière positive à support compact,

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} |u(t,x) - k|\partial_t \varphi(t,x) + \phi_k(u(t,x))\partial_x \varphi(t,x)\, dtdx + \int_{\mathbb{R}} |u_0(x) - k|\varphi(0,x)\, dx \geq 0 \tag{4.22}$$

et

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} |v(s,y) - k|\partial_t \varphi(s,y) + \phi_k(v(s,y))\partial_y \varphi(s,y)\, dsdy + \int_{\mathbb{R}} |v_0(y) - k|\varphi(0,y)\, dy \geq 0. \tag{4.23}$$

Admettons un instant qu'on puisse prendre $k = v(t,x)$ dans (4.22) (ce qui est bien sûr impossible car k doit être constant...). On verrait alors apparaitre la quantité $|u(t,x) - v(t,x)|$ que l'on souhaite estimer. Puisqu'un tel k ne peut être choisi directement, on va fixer des variables (s,y), prendre $k = v(s,y)$ puis intégrer en (s,y) ; on aura pris soin de choisir une fonction-test φ qui dépend aussi de (s,y) et "force" (s,y) à être proche de (t,x) (on mettra des approximations de l'unité en $t - s$ et $x - y$ dans la fonction-test) : ainsi, on verra effectivement apparaitre la quantité $|u(t,x) - v(t,x)|$, modulo des erreurs dont il nous faudra vérifier qu'elles sont effectivement négligeables. Cette technique de "dédoublement des variables" est dûe a S.N. Kruzkhov [8].

Dédoublement des variables

Prenons $\psi \in C_c^\infty([0,\infty[\times[0,\infty[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ positive. Avec (s,y) fixés, mettons $k = v(s,y)$ et $\varphi(t,x) = \psi(t,s,x,y)$ dans (4.22) puis intégrons en s et y :

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |u(t,x) - v(s,y)|\partial_t \psi(t,s,x,y) + F(u(t,x), v(s,y))\partial_x \psi(t,s,x,y)\, dtdsdxdy$$
$$+ \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |u_0(x) - v(s,y)|\psi(0,s,x,y)\, dsdxdy \geq 0$$

où $F(a,b) = f(\max(a,b)) - f(\min(a,b))$ est symétrique. De la même manière, en partant de (4.23) dans lequel on prend $k = u(t,x)$ et $\varphi(s,y) = \psi(t,s,x,y)$, on trouve

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |v(s,y) - u(t,x)|\partial_s \psi(t,s,x,y) + F(u(t,x), v(s,y))\partial_y \psi(t,s,x,y)\, dtdsdxdy$$
$$+ \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |v_0(y) - u(t,x)|\psi(t,0,x,y)\, dsdxdy \geq 0.$$

En sommant ces deux équations, on arrive à

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |u(t,x) - v(s,y)| \left(\partial_t \psi(t,s,x,y) + \partial_s \psi(t,s,x,y)\right)$$
$$+F(u(t,x), v(s,y)) \left(\partial_x \psi(t,s,x,y) + \partial_y \psi(t,s,x,y)\right)\, dtdsdxdy$$
$$+ \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |u_0(x) - v(s,y)|\psi(0,s,x,y)\, dsdxdy + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |v_0(y) - u(t,x)|\psi(t,0,x,y)\, dtdxdy \geq 0.$$

Soit $\theta_\nu \in C_c^\infty(]0,\nu[)$ et $\rho_\mu \in C_c^\infty(]-\mu,\mu[)$ deux approximations de l'unité ; soit $\phi \in C_c^\infty([0,\infty[\times\mathbb{R})$ positive. Posons $\psi(t,s,x,y) = \theta_\nu(t-s)\rho_\mu(x-y)\phi(t,x)$; on a alors

$$\begin{aligned}
\partial_t\psi(t,s,x,y) + \partial_s\psi(t,s,x,y) &= \theta'_\nu(t-s)\rho_\mu(x-y)\phi(t,x) + \theta_\nu(t-s)\rho_\mu(x-y)\partial_t\phi(t,x) \\
&\quad -\theta'_\nu(t-s)\rho_\mu(x-y)\phi(t,x) \\
&= \theta_\nu(t-s)\rho_\mu(x-y)\partial_t\phi(t,x)
\end{aligned}$$

et, de même,

$$\partial_x\psi(t,s,x,y) + \partial_y\psi(t,s,x,y) = \theta_\nu(t-s)\rho_\mu(x-y)\partial_x\phi(t,x).$$

De plus, puisque θ_ν est nulle sur $]-\infty,0]$, pour tout $s \geq 0$, on a $\psi(0,s,x,y) = 0$. On trouve donc

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty\int_0^\infty\int_\mathbb{R}\int_\mathbb{R} &|u(t,x)-v(s,y)|\theta_\nu(t-s)\rho_\mu(x-y)\partial_t\phi(t,x) \\
&+F(u(t,x),v(s,y))\theta_\nu(t-s)\rho_\mu(x-y)\partial_x\phi(t,x)\,dtdsdxdy \\
+\int_0^\infty\int_\mathbb{R}\int_\mathbb{R} &|v_0(y)-u(t,x)|\theta_\nu(t)\rho_\mu(x-y)\phi(t,x)\,dtdxdy \geq 0.
\end{aligned}\tag{4.24}$$

Soit $R > 0$ tel que le support de ϕ soit inclus dans $[0,R]\times[-R,R]$. Puisque θ_ν est à support dans $]0,\nu[$ et ρ_μ est à support dans $]-\mu,\mu[$, et puisque ces deux fonctions sont d'intégrale 1, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^R\int_0^\infty\int_{-R}^R\int_\mathbb{R} |v(t,x)-v(s,y)|\theta_\nu(t-s)\rho_\mu(x-y)\,dtdsdxdy \\
&\quad\leq \int_0^\nu\int_{-\mu}^\mu\left(\int_0^R\int_{-R}^R|v(t,x)-v(t-\zeta,x-\xi)|\,dtdx\right)\theta_\nu(\zeta)\rho_\mu(\xi)\,d\zeta d\xi \\
&\quad\leq \sup_{0<\zeta<\nu\,,\;-\mu<\xi<\mu}\left(\int_0^R\int_{-R}^R|v(t-\zeta,x-\xi)-v(t,x)|\,dtdx\right)\int_0^\nu\int_{-\mu}^\mu\theta_\nu(\zeta)\rho_\mu(\xi)\,d\zeta d\xi \\
&\quad\leq \sup_{0<\zeta<\nu\,,\;-\mu<\xi<\mu}\left(\int_0^R\int_{-R}^R|v(t-\zeta,x-\xi)-v(t,x)|\,dtdx\right)
\end{aligned}\tag{4.25}$$

(on étend éventuellement v par 0 dans les temps négatifs). Puisque $v \in L^\infty(]0,\infty[\times\mathbb{R}) \subset L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty[\times\mathbb{R})$, ce dernier terme tend vers 0 quand μ et ν tendent vers 0 (continuité des translations dans L^1). Ainsi, $\partial_t\phi$ étant bornée,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty\int_0^\infty\int_\mathbb{R}\int_\mathbb{R}|u(t,x)-v(s,y)|\theta_\nu(t-s)\rho_\mu(x-y)\partial_t\phi(t,x)\,dtdsdxdy \\
&\quad= \int_0^\infty\int_0^\infty\int_\mathbb{R}\int_\mathbb{R}|u(t,x)-v(t,x)|\theta_\nu(t-s)\rho_\mu(x-y)\partial_t\phi(t,x)\,dtdsdxdy + \omega_1(\mu,\nu) \\
&\quad= \int_0^\infty\int_\mathbb{R}|u(t,x)-v(t,x)|\int_0^\infty\theta_\nu(t-s)\,ds\int_\mathbb{R}\rho_\mu(x-y)\,dy\partial_t\phi(t,x)\,dtdx + \omega_1(\mu,\nu)
\end{aligned}$$

où $\omega_1(\nu,\mu) \to 0$ lorsque ν et μ tendent vers 0. On a $\int_\mathbb{R}\rho_\mu(x-y)\,dy = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; de plus, dès que $t > \nu$, $\int_0^\infty\theta_\nu(t-s)\,ds = 1$; mais

$$\left|\int_0^\nu\int_\mathbb{R}|u(t,x)-v(t,x)|\int_0^\infty\theta_\nu(t-s)\,ds\partial_t\phi(t,x)\,dtdx\right| \leq \int_0^\nu\int_\mathbb{R}|u(t,x)-v(t,x)|\,|\partial_t\phi(t,x)|\,dtdx \to 0$$

lorsque $\nu \to 0$, et on obtient donc

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty\int_0^\infty\int_\mathbb{R}\int_\mathbb{R}&|u(t,x)-v(s,y)|\theta_\nu(t-s)\rho_\mu(x-y)\partial_t\phi(t,x)\,dtdsdxdy \\
&= \int_0^\infty\int_\mathbb{R}|u(t,x)-v(t,x)|\partial_t\phi(t,x)\,dtdx + \omega_2(\mu,\nu)
\end{aligned}\tag{4.26}$$

où $\omega_2(\mu,\nu) \to 0$ lorsque μ et ν tendent vers 0.

On a $|F(u(t,x),v(s,y))| = |f(\max(u(t,x),v(s,y))) - f(\min(u(t,x),v(s,y)))| \le L|u(t,x)-v(s,y)|$ où L est une constante de Lipschitz de f sur un intervalle borné contenant les images de u et v. Donc

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^\infty \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} F(u(t,x),v(s,y))\theta_\nu(t-s)\rho_\mu(x-y)\partial_x\phi(t,x)\,dtdsdxdy\right| \\ &\quad\le\ L\int_0^\infty \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |u(t,x)-v(s,y)|\theta_\nu(t-s)\rho_\mu(x-y)|\partial_x\phi(t,x)|\,dtdsdxdy\end{aligned}$$

et, en utilisant à nouveau (4.25), on trouve

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^\infty \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} F(u(t,x),v(s,y))\theta_\nu(t-s)\rho_\mu(x-y)\partial_x\phi(t,x)\,dtdsdxdy\right| \\ &\quad\le\ L\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} |u(t,x)-v(t,x)|\,|\partial_x\phi(t,x)|\int_0^\infty \theta_\nu(t-s)\,ds\int_{\mathbb{R}}\rho_\mu(x-y)\,dy\,dtdx+\omega_3(\mu,\nu) \\ &\quad\le\ L\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} |u(t,x)-v(t,x)|\,|\partial_x\phi(t,x)|\,dtdx+\omega_3(\mu,\nu) \qquad (4.27)\end{aligned}$$

avec $\lim_{\mu\to 0,\nu\to 0}\omega_3(\mu,\nu)=0$.
Puisque $v_0\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, on a

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{-R}^R |v_0(y)-v_0(x)|\rho_\mu(x-y)\,dxdy \le \sup_{-\mu<\xi<\mu}\int_{-R}^R |v_0(x-\xi)-v_0(x)|\,dx\to 0$$

lorsque $\mu\to 0$. De plus, u est continue $[0,\infty[\to L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ et $u(0,\cdot)=u_0$, donc

$$\int_0^\infty\int_{-R}^R |u(t,x)-u_0(x)|\theta_\nu(t)|\phi(t,x)|\int_{\mathbb{R}}\rho_\mu(x-y)\,dy\,dtdx \le ||\phi||_\infty \sup_{0<t<\nu}\int_{-R}^R |u(t,x)-u_0(x)|\,dx\to 0$$

lorsque $\nu\to 0$. On déduit de ceci que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|v_0(y)-u(t,x)|\theta_\nu(t)\rho_\mu(x-y)\phi(t,x)\,dtdxdy \;&=\; \int_{\mathbb{R}}|v_0(x)-u_0(x)|\int_0^\infty\theta_\nu(t)\phi(t,x)\,dt\,dx \\ &\quad+\omega_4(\mu,\nu)\end{aligned}$$

où ω_4 se comporte comme les ω précédents. Vu que ϕ est régulière et θ_ν est une approximation de l'unité, le terme $\int_0^\infty \theta_\nu(t)\phi(t,x)\,dt$ converge uniformément vers $\phi(0,x)$, et on trouve donc

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|v_0(y)-u(t,x)|\theta_\nu(t)\rho_\mu(x-y)\phi(t,x)\,dtdxdy = \int_{\mathbb{R}}|v_0(x)-u_0(x)|\phi(0,x)\,dx+\omega_5(\mu,\nu) \quad (4.28)$$

avec $\omega_5(\mu,\nu)\to 0$ lorsque μ et ν tendent vers 0.

En injectant (4.26), (4.27) et (4.28) dans (4.24), puis en faisant $(\mu,\nu)\to(0,0)$, on obtient ainsi, pour tout ϕ régulière positive à support compact,

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}|u(t,x)-v(t,x)|\left(\partial_t\phi(t,x)+L|\partial_x\phi(t,x)|\right)\,dtdx+\int_{\mathbb{R}}|v_0(x)-u_0(x)|\phi(0,x)\,dx\ge 0. \qquad (4.29)$$

Comme voulu lors de l'introduction de la technique de dédoublement des variables, nous avons combiné les équations sur u et v pour obtenir une équation sur $|u-v|$.

Conclusion

Soit $x_0\in\mathbb{R}$, $M>0$, $\lambda>0$ et $\gamma\in C_c^\infty([0,M+\lambda[)$ positive décroissante et égale à 1 sur $[0,M[$. Soit $\Theta\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ positive ; prenons $\phi(t,x)=\Theta(t)\gamma(|x-x_0|+Lt)$. ϕ n'est pas régulière, mais elle peut néanmoins, par un procédé d'approximation, être utilisée dans (4.29). On a

$$\partial_t\phi(t,x)=\Theta'(t)\gamma(|x-x_0|+Lt)+L\Theta(t)\gamma'(|x-x_0|+Lt)$$

et, en se souvenant que γ est décroissante,

$$|\partial_x \phi(t,x)| = \left|\Theta(t)\gamma'(|x-x_0|+Lt)\frac{x-x_0}{|x-x_0|}\right| = -\Theta(t)\gamma'(|x-x_0|+Lt)$$

donc

$$\partial_t \phi(t,x) + L|\partial_x \phi(t,x)| = \Theta'(t)\gamma(|x-x_0|+Lt).$$

Soit $T>0$; considérons $\Theta(t) = \int_t^\infty \theta_r(T+s)\,ds$ où θ_r est une approximation de l'unité comme précédemment. On a alors $\Theta(0)=1$ et on trouve donc, par (4.29),

$$-\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} |u(t,x)-v(t,x)|\theta_r(T+t)\gamma(|x-x_0|+Lt)\,dtdx + \int_{\mathbb{R}} |v_0(x)-u_0(x)|\gamma(|x-x_0|)\,dx \geq 0.$$

Mais u et v sont continues $[0,\infty[\to L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ et γ est régulière à support compact, donc

$$t\in[0,\infty[\to \int_{\mathbb{R}} |u(t,x)-v(t,x)|\gamma(|x-x_0|+Lt)\,dx$$

est continue et, puisque θ_r est une approximation de l'unité,

$$\int_0^\infty \theta_r(T+s)\int_{\mathbb{R}} |u(t,x)-v(t,x)|\gamma(|x-x_0|+Lt)\,dx\,dt \to \int_{\mathbb{R}} |u(T,x)-v(T,x)|\gamma(|x-x_0|+LT)\,dx$$

lorsque $r\to 0$. On trouve finalement

$$\int_{\mathbb{R}} |u(T,x)-v(T,x)|\gamma(|x-x_0|+LT)\,dtdx \leq \int_{\mathbb{R}} |v_0(x)-u_0(x)|\gamma(|x-x_0|)\,dx$$

et, puisque γ est borné par 1, à support dans $[0,M+\lambda]$ et $\gamma(|x-x_0|+LT)=1$ lorsque $|x-x_0|\leq M-LT$, on en déduit

$$\int_{x_0-(M-LT)}^{x_0+M-LT} |u(T,x)-v(T,x)|\,dtdx \leq \int_{x_0-M-\lambda}^{x_0+M+\lambda} |v_0(x)-u_0(x)|\,dx.$$

En faisant $\lambda\to 0$ et en changeant M en $R+LT$ et T en t, on a donc prouvé le résultat suivant.

Théorème 4.6 *Soient u_0 et v_0 deux fonctions dans $L^\infty(\mathbb{R})$. Soient u et v des solutions entropiques de (4.1) pour les conditions initiales respectives u_0 et v_0, et L une constante de Lipschitz de f sur un intervalle borné contenant les images de u et v. On a, pour tout $R>0$ et tout $t>0$,*

$$\int_{x_0-R}^{x_0+R} |u(t,x)-v(t,x)|\,dx \leq \int_{x_0-R-Lt}^{x_0+R+Lt} |u_0(x)-v_0(x)|\,dx \tag{4.30}$$

Ce théorème est un résultat de propagation à vitesse finie : les valeurs de u sur $\{t\}\times[x_0-R,x_0+R]$ ne dépendent que des valeurs de u_0 sur $[x_0-R-Lt,x_0+R+Lt]$. On a en fait le cône de dépendance suivant :

Ce théorème entraine donc trivialement l'unicité de la solution entropique (si $u_0=v_0$, alors l'inégalité de propagation à vitesse finie dit que $u=v$ sur $\{t\}\times[-R,R]$, pour tout $t>0$ et tout $R>0$). Et il permet aussi de conclure à l'existence d'une solution entropique lorsque la condition initiale n'est pas régulière, comme nous allons le voir dans le résultat final suivant.

Théorème 4.7 *Pour tout $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ il existe une et une seule solution entropique à (4.1).*

Démonstration du théorème 4.7 :
Il reste à voir l'existence d'une solution lorsque u_0 n'est pas régulière. Supposons donc qu'elle est dans $L^\infty(\mathbb{R})$; il existe une suite de fonctions $u_0^n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ qui converge presque partout vers u_0 et telle que $||u_0^n||_\infty \leq ||u_0||_\infty$ (on construit une telle suite par les méthodes usuelles de troncature et convolution). Soit u^n la solution entropique pour la condition initiale u_0^n ; on sait qu'une telle solution existe par la proposition 4.1, et qu'elle est de plus bornée par $||u_0^n||_\infty \leq ||u_0||_\infty$.
Soit $R > 0$ et $T > 0$. On a, pour tout $t \in [0, T]$, par le théorème 4.6,

$$\int_{-R}^{R} |u^n(t,x) - u^m(t,x)|\,dx \leq \int_{-R-LT}^{R+LT} |u_0^n(x) - u_0^m(x)|\,dx$$

où L est une constante de Lipschitz de f sur $[-||u_0||_\infty, ||u_0||_\infty]$. Mais $u_0^n \to u_0$ presque partout en étant dominée par une constante ; la convergence a donc lieu dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ et, pour tout $M > 0$, $(u_0^n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $L^1([-M, M])$. L'inégalité précédente montre donc que, pour tout $R > 0$ et tout $T > 0$, $(u^n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans $C([0,T]; L^1([-R,R]))$ et converge dans cet espace.
Ceci nous donne une fonction $u \in C([0,\infty[; L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}))$ limite des u^n dans chaque $C([0,T]; L^1([-R,R]))$ ($T > 0$, $R > 0$), donc dans $L^1(]0,T[\times]-R,R[)$. En particulier, quitte à extraire une suite, $u^n \to u$ presque partout sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}$; comme $||u^n||_{L^\infty(]0,\infty[\times\mathbb{R})} \leq ||u_0||_\infty$, on en déduit que u est bornée et que $||u||_{L^\infty(]0,\infty[\times\mathbb{R})} \leq ||u_0||_{L^\infty(\mathbb{R})}$.
Puisque $u_0^n \to u_0$ et $u^n \to u$ presque partout en étant bornées, on peut aisément passer à la limite dans la formulation entropique que vérifie u^n pour voir que u est une solution entropique pour la condition initiale u_0. ■

4.7 Propriétés de la solution entropique

Voilà quelques propriétés des solutions entropiques, immédiates à démontrer grâce au théorème 4.6

Théorème 4.8 *Soit u_0 et v_0 bornées ; on note u et v les solutions entropiques de (4.1) correspondant à u_0 et v_0.*

i) $||u||_{L^\infty(]0,\infty[\times\mathbb{R})} \leq ||u_0||_{L^\infty(\mathbb{R})}$.

ii) Si $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ alors $u \in C([0,\infty[; L^1(\mathbb{R}))$ et, pour tout $t > 0$, $||u(t,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})} \leq ||u_0||_{L^1(\mathbb{R})}$.

iii) Si $u_0 \in BV(\mathbb{R})$, alors $u(t,\cdot) \in BV(\mathbb{R})$ pour tout $t \geq 0$ et $|u|_{BV(\mathbb{R})} \leq |u_0|_{BV(\mathbb{R})}$.

iv) Si $u_0 - v_0 \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour tout $t > 0$ on a $u(t,\cdot) - v(t,\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$ et $||u(t,\cdot) - v(t,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})} \leq ||u_0 - v_0||_{L^1(\mathbb{R})}$.

Démonstration du théorème 4.8 :
La propriété i) a déjà été vue au cours de la preuve du théorème 4.7 (on a construit une solution entropique qui vérifie ceci).
Si $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ alors en prenant $v_0 = 0$ (donc $v = 0$) et en faisant $R \to \infty$ dans (4.30) on trouve $||u(t,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})} \leq ||u_0||_{L^1(\mathbb{R})}$. On prouve iv) de la même manière. On a vu en proposition 4.1 que, lorsque la condition initiale est dans $W^{2,1}(\mathbb{R})$, alors la solution entropique est continue à valeurs dans $L^1(\mathbb{R})$; prenons $u_0^n \in W^{2,1}(\mathbb{R})$ qui converge vers u_0 dans $L^1(\mathbb{R})$ (une simple convolution par un noyau régularisant donne une telle suite) et notons u^n la solution entropique correspondante. En appliquant (4.30) et en faisant $R \to \infty$ on trouve, pour tout $t > 0$,

$$||u(t,\cdot) - u^n(t,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})} \leq ||u_0 - u_0^n||_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Cela prouve donc que $u^n \to u$ dans $L^1(\mathbb{R})$ uniformément par rapport à t, et donc que u est bien continue $[0,\infty[\to L^1(\mathbb{R})$.
Supposons $u_0 \in BV(\mathbb{R})$. Pour tout $h \in \mathbb{R}$, $u(\cdot, \cdot + h)$ est la solution entropique pour la condition initiale $u_0(\cdot + h)$ (vérification immédiate sur la définition) ; donc par le théorème 4.6,

$$\int_{-R}^{R} |u(t,x+h) - u(t,x)|\,dx \leq \int_{-R-Lt}^{R+Lt} |u_0(x+h) - u_0(x)|\,dx.$$

Mais, lorsque $u_0 \in BV(\mathbb{R})$, on a $\int_{\mathbb{R}} |u_0(x+h) - u_0(x)|\, dx \leq |h|\, |u_0|_{BV(\mathbb{R})}$ (on peut par exemple prouver cela lorsque u_0 est régulière et utiliser l'approximation classique des fonctions BV par des fonctions régulières). En faisant donc $R \to \infty$, par Fatou, dans l'inégalité précédente, on trouve

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t,x+h) - u(t,x)|\, dx \leq |h|\, |u_0|_{BV(\mathbb{R})}.$$

Ceci prouve, par un argument classique (simplement en utilisant la définition de la dérivée au sens des distributions de $u(t,\cdot)$) que $u(t,\cdot) \in BV(\mathbb{R})$ avec $|u(t,\cdot)|_{BV(\mathbb{R})} \leq |u_0|_{BV(\mathbb{R})}$. ∎

On a vu que, pour des conditions initiales assez régulières, la solution de (4.5) converge, quand $\varepsilon \to 0$, vers la solution entropique de (4.1). En utilisant la technique de dédoublement des variables pour combiner la formulation entropique (4.20) pour la solution de (4.5) et la formulation entropique pour (4.1), on peut prouver le résultat suivant, qui donne une vitesse pour cette convergence (voir [9]). A noter que cette vitesse est optimale.

Théorème 4.9 *Si $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$, u^ε est la solution de (4.5) et u est la solution entropique de (4.1), alors pour tout $T > 0$ on a*

$$||u^\varepsilon - u||_{C([0,T];L^1(\mathbb{R}))} = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}).$$

4.8 Problème de Riemann

Nous étudions ici le problème de Riemann associé à (4.1), à savoir le cas où la condition initiale est constante sur $\mathbb{R}^-$ et sur $\mathbb{R}^+$:

$$\left\{ \begin{array}{lr} \partial_t u(t,x) + \partial_x(f(u))(t,x) = 0 & t > 0\,,\ x \in \mathbb{R}\,, \\ u(0,x) = u_0(x) := \left\{ \begin{array}{ll} u_g & \text{si } x < 0 \\ u_d & \text{si } x > 0\,, \end{array} \right. & x \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \tag{4.31}$$

4.8.1 Chocs

Dans un premier temps, on cherche une solution entropique constante en deux morceaux séparés par une droite de pente σ dans le demi-plan $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ (on peut intuiter cela en se rappelant la méthode des caractéristiques, dans laquelle la condition initiale était transportée le long de droites).

La question est de savoir s'il existe (et si oui lequel) un σ tel que cette fonction soit solution entropique de (4.31).

Trouvons d'abord une condition sur σ pour que la fonction soit solution faible. Notons $E_- = \{(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mid x < \sigma t\}$ et $E_+ = \{(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mid x > \sigma t\}$. Si φ est régulière à support compact, comme u est constante sur E_- et E_+, on a, par Stokes,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}} u(t,x)\partial_t\varphi(t,x) + f(u(t,x))\partial_x\varphi(t,x)\,dtdx \\
&= \int_{E_-} u_g\partial_t\varphi(t,x) + f(u_g)\partial_x\varphi(t,x)\,dtdx + \int_{E_+} u_d\partial_t\varphi(t,x) + f(u_d)\partial_x\varphi(t,x)\,dtdx \\
&= \int_{\partial E_-} u_g\varphi(t,x)n_t^-(t,x) + f(u_g)\varphi(t,x)n_x^-(t,x)\,d\gamma(t,x) \\
&\quad + \int_{\partial E_+} u_d\varphi(t,x)n_t^+(t,x) + f(u_d)\varphi(t,x)n_x^+(t,x)\,d\gamma(t,x)
\end{aligned}
$$

où $n^- = (n_t^-, n_x^-)$ et $n^+ = (n_t^+, n_x^+)$ sont les normales sortante à E_- et E_+ respectivement, et γ est la mesure sur ∂E_- et ∂E_+.
On a $\partial E_- = (\{0\}\times\mathbb{R}^-)\cup D_\sigma$ où D_σ est la demi-droite $x = \sigma t\,,\ t > 0$; de plus, $n^- = (-1,0)$ sur $\{0\}\times\mathbb{R}^-$ et $n^- = \frac{(-\sigma,1)}{\sqrt{1+\sigma^2}}$ sur D_σ. De même, $\partial E_+ = (\{0\}\times\mathbb{R}^+)\cup D_\sigma$ avec $n^+ = (-1,0)$ sur $\{0\}\times\mathbb{R}^+$ et $n^+ = -n^-$ sur D_σ. Donc

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}} u(t,x)\partial_t\varphi(t,x) + f(u(t,x))\partial_x\varphi(t,x)\,dtdx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^-} u_g\varphi(0,x)\,dx + \frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2}}\int_{D_\sigma} (-\sigma u_g + f(u_g))\varphi(t,x)\,d\gamma(t,x) \\
&\quad -\int_{\mathbb{R}_+} u_d\varphi(0,x)\,dx + \frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2}}\int_{D_\sigma} (\sigma u_d - f(u_d))\varphi(t,x)\,d\gamma(t,x)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}} u(t,x)\partial_t\varphi(t,x) + f(u(t,x))\partial_x\varphi(t,x)\,dtdx + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(0,x)\,dx \\
&\qquad = \frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2}}\int_{D_\sigma} (\sigma(u_d-u_g) - (f(u_d)-f(u_g)))\varphi(t,x)\,d\gamma(t,x).
\end{aligned}
$$

Pour que u soit solution, il faut donc que $\sigma(u_d-u_g)-(f(u_d)-f(u_g)) = 0$. En notant $[X] = X_d - X_g$ le saut d'une quantité X au travers de la droite D_σ, cela s'écrit encore

$$
[f(u)] = \sigma[u]. \tag{4.32}
$$

Cette condition permet donc de trouver σ, unique, tel que la fonction u constante en deux morceaux soit solution faible de (4.31). Cette solution discontinue est appelée “choc” et σ est la vitesse du choc.

Essayons maintenant de voir si cette solution faible est solution entropique. Si (η,ϕ) est un couple entropie-flux et φ est une fonction-test positive, les mêmes calculs que précédemment (valables car $\eta(u)$ et $\phi(u)$ sont aussi constantes sur E_- et E_+) donnent

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}} \eta(u(t,x))\partial_t\varphi(t,x) + \phi(u(t,x))\partial_x\varphi(t,x)\,dtdx + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x))\varphi(0,x)\,dx \\
&\qquad = \frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2}}\int_{D_\sigma} (\sigma(\eta(u_d)-\eta(u_g)) - (\phi(u_d)-\phi(u_g)))\varphi(t,x)\,d\gamma(t,x)
\end{aligned}
$$

et la condition pour que u soit solution entropique devient donc :

$$
\text{pour tout couple entropie-flux } (\eta,\phi), \qquad [\phi(u)] \le \sigma[\eta(u)]. \tag{4.33}
$$

A titre d'exercice, vérifions que, lorsque $u_g \ge u_d$ et f est convexe, la fonction u considérée est bien solution entropique.

On a, par (4.32) et le théorème des accroissements finis, $\sigma = f'(a)$ pour un $a \in [u_d, u_g]$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
[\phi(u)] - \sigma[\eta(u)] &= \int_{u_g}^{u_d} \eta'(s) f'(s)\, ds - f'(a) \int_{u_g}^{u_d} \eta'(s)\, ds \\
&= \int_{u_g}^{u_d} \eta'(s)(f'(s) - f'(a))\, ds \\
&= \int_{u_g}^{a} \eta'(s)(f'(s) - f'(a))\, ds + \int_{a}^{u_d} \eta'(s)(f'(s) - f'(a))\, ds.
\end{aligned}$$

Or f' est croissant (f est convexe) donc $f' - f'(a)$ a des signes constants sur $[a, u_g]$ et sur $[u_d, a]$. Le théorème de la moyenne donne donc $\xi \in [a, u_g]$ et $\zeta \in [u_d, a]$ tels que

$$[\phi(u)] - \sigma[\eta(u)] = \eta'(\xi) \int_{u_g}^{a} f'(s) - f'(a)\, ds + \eta'(\zeta) \int_{a}^{u_d} f'(s) - f'(a)\, ds.$$

Mais $\int_{u_g}^{u_d} f'(s) - f'(a)\, ds = [f(u)] - f'(a)(u_d - u_g) = [f(u)] - \sigma[u] = 0$ donc

$$[\phi(u)] - \sigma[\eta(u)] = (\eta'(\xi) - \eta'(\zeta)) \int_{u_g}^{a} f'(s) - f'(a)\, ds.$$

Or $\xi \geq \zeta$ (rappelons que $u_g \geq a \geq u_d$ et que $\xi \in [a, u_g]$, $\zeta \in [u_d, a]$) donc $\eta'(\xi) - \eta'(\zeta) \geq 0$ (η' est croissante puisque η est convexe). De plus, $f' \geq f'(a)$ sur $[a, u_g]$ donc $\int_{u_g}^{a} f'(s) - f'(a)\, ds \leq 0$ (on a $a \leq u_g$), et on en déduit bien que u vérifie (4.33).
Si l'on suppose $u_g < u_d$ et f convexe, alors u n'est pas solution entropique, sauf cas particulier (du genre f linéaire). On peut s'en convaincre en prenant $f(s) = s^2/2$, $u_g = -1$, $u_d = 1$ et $\eta(s) = s^2/2$.

4.8.2 Détente

Dans le cas où f est convexe mais $u_g < u_d$, la solution n'est pas un choc mais une détente. On aura toujours u constante dans deux parties E_- et E_+ du demi-plan (x, t), mais le passage d'une constante à l'autre se fait continuement au travers d'une troisième partie E.

Les pentes σ_+ et σ_- sont déterminées par la méthode des caractéristiques : on s'attend par exemple à ce que u_d soit transportée à une vitesse $f'(u_d)$, et on prend donc $\sigma_+ = f'(u_d)$. De même, $\sigma_- = f'(u_g)$, et on constate bien, par croissance de f', que $\sigma_+ > \sigma_-$, autrement dit les deux droites partent bien chacune de leur côté et on peut poser sans ambiguité

$$u(t, x) = \begin{cases} u_d & \text{si } x > \sigma_+ t\,, \\ u_g & \text{si } x < \sigma_- t \end{cases}$$

(notons que cela n'aurait pas été possible dans le cas d'un choc, de sorte qu'une heuristique basée sur la méthode des caractéristiques ne permet pas de déterminer la vitesse d'un choc).

Pour relier E_- et E_+, on cherche une solution dans E de la forme $u(t,x) = v(x/t)$ (par unicité de la solution entropique, on doit avoir $u(\lambda t, \lambda x) = u(t,x)$ lorsque $\lambda > 0$, puisque la condition initiale vérifie $u_0(\lambda x) = u_0(x)$). Il faut donc

$$-\frac{x}{t^2}v'\left(\frac{x}{t}\right) + \frac{1}{t}f'\left(v\left(\frac{x}{t}\right)\right)v'\left(\frac{x}{t}\right) = 0$$

soit, en posant $\xi = x/t$ qui est dans $[\sigma_-,\sigma_+]$ lorsque $(x,t) \in E$,

$$(f'(v(\xi)) - \xi)v'(\xi) = 0.$$

En supposant que v' ne va pas trop s'annuler, cela demande à avoir

$$\forall \xi \in [\sigma_-,\sigma_+]\,, \quad f'(v(\xi)) = \xi$$

c'est-à-dire que v doit être une réciproque de f'. Si on suppose f uniformément convexe (i.e. $f'' > 0$), alors $f' : [u_g, u_d] \to [\sigma_-,\sigma_+]$ est un homéomorphisme et difféomorphisme $]u_g, u_d[\to]\sigma_-,\sigma_+[$, donc il existe bien $v : [\sigma_-,\sigma_+] \to [u_g,u_d]$ réciproque de f' qui relie continuement (et en croissant) les valeurs u_g et u_d, et qui est dérivable (de même régularité que f, en fait) sur $]\sigma_-,\sigma_+[$.

Dans le cas uniformément convexe, on peut donc poser

$$u(t,x) = \begin{cases} u_d & \text{si } x > \sigma_+ t\,, \\ \zeta \text{ tel que } f'(\zeta) = \frac{x}{t}, & \text{si } \sigma_- t \leq x \leq \sigma_+ t\,, \\ u_g & \text{si } x < \sigma_- t. \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\backslash\{(0,0)\}$ (rappelons que $u(t,x) = v(x/t)$ sur E, avec v continue qui vaut u_g en σ_- et u_d en σ_+) et c'est une solution classique de $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ sur E_-, E_+ et E. Il n'est pas dur de voir qu'une telle fonction est alors bien solution entropique de (4.31) (on decoupe les intégrales en trois, sur chaque partie E_-, E_+ et E on peut faire une intégration par parties et, puisque u est continue, les termes de bord se recollent bien et se compensent ; pour eviter la petite singularité en 0, on peut commencer par ôter une petite boule autour de 0, ce qui n'enlevera pas de terme notable puisque u est bornée — lorsque la boule enlevée est petite, le terme ôté dans les intégrales est aussi petit).

Cette solution, qui relie continuement deux états constants u_g et u_d, est appelée "détente".

4.9 Annexe

Dans cette annexe, nous établissons quelques comportement de la solution de (4.5). Les estimations que nous obtenons ici ne sont pas à considérer comme des estimations intéressantes vis-a-vis du passage à la limite $\varepsilon \to 0$; en effet, comme dans l'étude de l'existence d'une solution à (4.5) nous prenons ici $\varepsilon = 1$ (et notons u pour u^ε), de sorte qu'on n'étudie absolument pas le comportement de ces estimations par rapport à ε.
Ces résultats sont purement techniques et servent à justifier des intégrations qui sont faites lors des estimations de compacité, justement indépendantes de ε.

Lemme 4.2 *Soit f régulière sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = 0$, et $R' > 0$. Il existe $C > 0$ ne dépendant que de f et R' tel que, si $(\phi,\psi) \in W^{2,1}(\mathbb{R})$ et R' majore ϕ, ψ, $\partial_x\phi$ et $\partial_x\psi$, alors*

$$||f(\phi)||_{W^{2,1}(\mathbb{R})} \leq C||\phi||_{W^{2,1}(\mathbb{R})} \quad \textit{et} \quad ||f(\phi) - f(\psi)||_{W^{2,1}(\mathbb{R})} \leq C||\phi - \psi||_{W^{2,1}(\mathbb{R})}(1 + ||\psi||_{W^{2,1}(\mathbb{R})}).$$

Démonstration du lemme 4.2 :
La première inégalité est une conséquence de la deuxième pour $\psi = 0$. Prouvons donc cette deuxième inégalité.
On a

$$|f(\phi) - f(\psi)| \leq \sup_{[-R',R']} |f'|\,|\phi - \psi|\,,$$

$$
\begin{aligned}
|\partial_x f(\phi) - \partial_x f(\psi)| &= |f'(\phi)\partial_x\phi - f'(\psi)\partial_x\psi| \\
&\le |f'(\phi) - f'(\psi)|\,|\partial_x\phi| + |f'(\psi)|\,|\partial_x\phi - \partial_x\psi| \\
&\le R' \sup_{[-R',R']} |f''|\,|\phi-\psi| + \sup_{[-R',R']} |f'|\,|\partial_x\phi - \partial_x\psi|
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
|\partial_x^2 f(\phi) - \partial_x^2 f(\psi)| &= |f''(\phi)(\partial_x\phi)^2 + f'(\phi)\partial_x^2\phi - f''(\psi)(\partial_x\psi)^2 - f'(\psi)\partial_x^2\psi| \\
&\le |f''(\phi) - f''(\psi)|\,|(\partial_x\phi)^2| + |f''(\psi)|\,|(\partial_x\phi)^2 - (\partial_x\psi)^2| \\
&\quad + |f'(\phi) - f'(\psi)|\,|\partial_x^2\psi| + |f'(\phi)|\,|\partial_x^2\phi - \partial_x^2\psi| \\
&\le (R')^2 \sup_{[-R',R']} |f'''|\,|\phi-\psi| + 2R' \sup_{[-R',R']} |f''|\,|\partial_x\phi - \partial_x\psi| \\
&\quad + \sup_{[-R',R']} |f''|\,|\phi-\psi|\,|\partial_x^2\psi| + \sup_{[-R',R']} |f'|\,|\partial_x^2\phi - \partial_x^2\psi|.
\end{aligned}
$$

En intégrant ces trois inégalités sur $\mathbb{R}$, on trouve C ne dépendant que de f et R' telle que

$$
\begin{aligned}
||f(\phi) - f(\psi)||_{W^{2,1}(\mathbb{R})} &\le C||\phi-\psi||_{L^1(\mathbb{R})} + C||\partial_x\phi - \partial_x\psi||_{L^1(\mathbb{R})} \\
&\quad + C||\phi-\psi||_{L^\infty(\mathbb{R})}||\partial_x^2\psi||_{L^1(\mathbb{R})} + C||\partial_x^2\phi - \partial_x^2\psi||_{L^1(\mathbb{R})}.
\end{aligned}
$$

Etant donné que $||\phi-\psi||_{L^\infty(\mathbb{R})} \le ||\phi-\psi||_{W^{1,1}(\mathbb{R})} \le ||\phi-\psi||_{W^{2,1}(\mathbb{R})}$, cela conclut la preuve. ■

Lemme 4.3 *Si $u_0 \in W^{2,1}(\mathbb{R})$ et u est la solution de (4.5), alors il existe $T > 0$ ne dépendant que d'un majorant de $||u_0||_{W^{2,1}(\mathbb{R})}$ tel que u, $\partial_x u$ et $\partial_x^2 u$ sont dans $L^\infty(]0,T[;L^1(\mathbb{R}))$.*

Démonstration du lemme 4.3 :
Nous allons montrer, toujours par point fixe dans un espace ad-hoc et pour T assez petit, que (4.5) a une solution (au sens de la définition 4.2) qui est, avec ses deux premières dérivées spatiales, dans $L^\infty(]0,T[;L^1(\mathbb{R}))$; par unicité de la solution, cette solution sera bien celle que l'on considère depuis le début.

On peut toujours supposer $f(0) = 0$ (retrancher une constante à f ne change pas (4.5)).
Soit ψ définie sur $C_b(]0,T[\times\mathbb{R})$ par (4.7) ; on sait déjà que, lorsque $u \in C_b(]0,T[\times\mathbb{R})$, $\psi(u)$ est encore dans $C_b(]0,T[\times\mathbb{R})$. Considérons le Banach

$$
F = \{u \in C_b(]0,T[\times\mathbb{R}) \cap L^\infty(]0,T[;L^1(\mathbb{R})) \mid \partial_x u \text{ et } \partial_x^2 u \text{ sont dans } L^\infty(]0,T[;L^1(\mathbb{R}))\}
$$

(il s'agit bien sûr des dérivées au sens des distributions). Il est assez facile de voir que, pour $i = 0,1,2$ et lorsque $u \in F$, on a

$$
\partial_x^i \psi(u)(t,x) = G(t,\cdot) * \partial_x^i u_0(x) - \int_0^t \partial_x G(t-s,\cdot) * \partial_x^i(f(u(s,\cdot)))(x)\,ds \tag{4.34}
$$

(basiquement, parce que tous ces termes sont bien définis et intégrables comme nous allons le voir), de sorte que les inégalités de Young pour la convolution et le lemme 4.2 donnent

$$
\begin{aligned}
||\psi(u)(t,\cdot)||_{W^{2,1}(\mathbb{R})} &\le ||u_0||_{W^{2,1}(\mathbb{R})} + C_1\mathcal{K}_1 \int_0^t (t-s)^{-1/2}||u(s,\cdot)||_{W^{2,1}(\mathbb{R})} \\
&\le ||u_0||_{W^{2,1}(\mathbb{R})} + C_1 R'\mathcal{K}_1 2t^{1/2}
\end{aligned} \tag{4.35}
$$

où C_1 ne dépend que d'un majorant R' de u dans F (notons que majorer u dans F revient en particulier à la majorer ainsi que $\partial_x u$ dans $L^\infty(]0,T[;W^{1,1}(\mathbb{R}))$, donc dans $L^\infty(]0,T[\times\mathbb{R})$ puisque $W^{1,1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$). Donc $\psi(u) \in F$.
Cette estimation et (4.8) montrent aussi que, si $||u||_F \le R'$, $R \ge ||u_0||_{W^{2,1}(\mathbb{R})}$ et $R' > R$, on a

$$
||\psi(u)||_F \le R + C_2 T^{1/2}
$$

où C_2 ne dépend que de R'. On peut donc choisir $T > 0$ tel que ψ envoie la boule de rayon R' de F dans elle-même.

Il reste à voir le caractère contractant de ψ sur cette boule, ce qui est assez simple vu le lemme 4.2 ; en effet, si u et v sont dans cette boule, ce lemme et (4.34) impliquent

$$||\psi(u)(t,\cdot) - \psi(v)(t,\cdot)||_{W^{2,1}(\mathbb{R})} \leq C_3||u-v||_F t^{1/2}$$

où C_3 ne dépend que de R'. Associée à (4.9), cette estimation montre que, pour T assez petit, ψ est effectivement contractant de la boule de rayon R' de F dans elle-même ; elle admet donc un unique point fixe dans cette boule, ce qui donne bien une solution à (4.5) bornée et qui est, avec ses deux premières dérivées, dans $L^1(\mathbb{R})$ pour tout $t > 0$. ■

Corollaire 4.2 *Soit $u_0 \in W^{2,1}(\mathbb{R})$ et u une solution de (4.5) sur $]0,T[$. Alors u, $\partial_x u$ et $\partial_x^2 u$ sont dans $L^\infty(]0,T[;L^1(\mathbb{R}))$ et, pour tout $t > 0$, $u(t,\cdot)$, $\partial_x u(t,\cdot)$ et $\partial_x^2 u(t,\cdot)$ tendent vers 0 à l'infini.*
Qui plus est, $u(t,\cdot) \to u_0$ dans $W^{2,1}(\mathbb{R})$ lorsque $t \to 0$.

Bien sûr, la différence entre ce corollaire et le lemme 4.3 est le passage du local au global : le lemme affirmait le résultat du corollaire uniquement pour T assez petit.

Démonstration du corollaire 4.2 :
Pour montrer la décroissance à l'infini de u et ses dérivées, il suffit de montrer que u, $\partial_x u$ et $\partial_x^2 u$ sont dans $L^\infty(]0,T[;L^1(\mathbb{R}))$; en effet, vu que toutes les dérivées de u sont uniformément continues sur $\{t\} \times \mathbb{R}$ pour tout $t \in]0,T[$ (toutes ses dérivées sont bornées sur cette ligne), l'intégrabilité de u et de ses deux premières dérivées nous assurera qu'elles tendent bien vers 0 à l'infini
Le lemme 4.3 dit que, pour $T_0 > 0$ assez petit, on a bien la régularité voulue pour u et ses dérivées. Dans ce cas, la majoration du deuxième terme de ψ effectuée dans (4.35) montre (puisque $u = \psi(u)$) que

$$||u(t,\cdot) - G(t,\cdot) * u_0||_{W^{2,1}(\mathbb{R})} \leq Ct^{1/2} \to 0 \quad \text{lorsque } t \to 0.$$

Puisque $G(t,\cdot)$ est une approximation de l'unité lorsque $t \to 0$, on a classiquement $G(t,\cdot) * u_0 \to u_0$ dans $W^{2,1}(\mathbb{R})$, et donc $u(t,\cdot) \to u_0$ dans le même espace.
Il reste à voir que l'intégrabilité de u et de ses dérivées est valable pour tout temps, pas uniquement pour les temps petits. Soit $t_0 > 0$ et $t_1 \geq t_0$ assez petits pour que $u(t_1,\cdot) \in W^{2,1}(\mathbb{R})$. Prenons $0 < T_1 < T$ tel que u ait la régularité voulue sur $[t_1, T_1[$; on sait que les dérivées de u sont globalement bornées sur $[t_0, T[\times\mathbb{R}$ (théorème 4.2) donc le lemme 4.2 et (4.6) (écrit en partant de $t = t_1$ et non de $t = 0$) donnent C_1 indépendant de t_1, T_1 et de $u(t_1,\cdot)$ (C_1 ne dépend que des bornes connues a priori sur u et ses dérivées, c'est-à-dire de t_0) tel que, pour tout $t \in [0, T_1 - t_1[$,

$$||u(t_1+t,\cdot)||_{W^{2,1}(\mathbb{R})} \leq ||u(t_1,\cdot)||_{W^{2,1}(\mathbb{R})} + C_1\mathcal{K}_1 \int_0^t (t-s)^{-1/2}||u(t_1+s,\cdot)||_{W^{2,1}(\mathbb{R})}\, ds.$$

Soit $M(t) = \sup_{s\in[0,t]} ||u(t_1+s,\cdot)||_{W^{2,1}(\mathbb{R})}$; cette inégalité entraine

$$||u(t_1+t,\cdot)||_{W^{2,1}(\mathbb{R})} \leq ||u(t_1,\cdot)||_{W^{2,1}(\mathbb{R})} + C_2 M(t)\sqrt{t}$$

donc, puisque M est croissant,

$$M(t) \leq ||u(t_1,\cdot)||_{W^{2,1}(\mathbb{R})} + C_2 M(t)\sqrt{t}$$

avec C_2 indépendant de t_1, T_1 et $u(t_1,\cdot)$. En particulier, on voit que, pour $t \leq 1/(4C_2^2)$, on a

$$M(t) \leq 2||u(t_1,\cdot)||_{W^{2,1}(\mathbb{R})}. \tag{4.36}$$

Ceci prouve que la norme de $u(t,\cdot)$ dans $W^{2,1}(\mathbb{R})$ ne peut exploser en temps fini. En effet, (4.36) montre qu'en un temps fixe $1/(4C_2^2)$ (indépendant du temps initial choisi, pourvu qu'il soit supérieur à t_0), elle peut tout au plus doubler.
Puisque cette norme n'explose pas en temps fini, le lemme 4.3 permet (d'une manière similaire à celle employée en fin de partie 4.5.1) de prolonger indéfiniment la propriété d'intégrabilité des dérivées de u, puisque le temps sur lequel ce lemme donne l'intégrabilité en question est minoré lorsque la condition initiale est dans un borné de $W^{2,1}(\mathbb{R})$. ■

Deuxième partie

Solutions de viscosité

Chapitre 5

Définition et stabilité des solutions de viscosité

5.1 Exemples d'application

5.1.1 Contrôle optimal et jeux différentiels en horizon infini

On considère l'EDO suivante
$$\begin{cases} y'(t) = b(y(t), \alpha(t)) \\ y(0) = x \end{cases}$$
dans lequel intervient un contrôle $\alpha(\cdot)$, c'est-à-dire une fonction mesurable $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{A}$ o $\mathcal{A}$ est un espace métrique compact. Lorsque l'on cherche à minimiser le critère

$$J(x, \alpha(\cdot)) = \int_0^\infty f(y(t), \alpha(t)) e^{-\lambda t}\, dt$$

par rapport au contrôle $\alpha(\cdot)$, il se trouve que la fonction valeur $V(x) = \inf_{\alpha(\cdot)} J(x, \alpha(.))$ est "solution" de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman, ou simplement équation de Bellman,

$$\lambda u(x) + \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \{-b_\alpha(x) \cdot \nabla u(x) - f_\alpha(x)\} = 0. \tag{5.1}$$

Il se peut que deux contrôles interviennent dans l'équation différentielle et qu'un joueur essaye de maximiser J par rapport à l'un tandis qu'un second joueur essaye de minimiser J avec le second contrôle : c'est la situation des jeux différentiels à deux joueurs et somme nulle et, dans ce cas, l'équation qui intervient est de la forme :
$$\lambda u(x) + \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \inf_{\beta \in \mathcal{B}} \{-b_{\alpha,\beta}(x) \cdot \nabla u(x) - f_{\alpha,\beta}(x)\} = 0. \tag{5.2}$$

On parle dans ce cas de l'équation de Isaacs. Ensuite, il se peut que l'équation différentielle qui gouverne le problème de contrôle soit stochastique (contrôle optimal stochastique). L'équation de Bellman associée est alors de la forme :

$$\lambda u(x) + \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \left\{ - \sum_{i,j=1}^N a_\alpha^{i,j}(x) \partial_{ij} u(x) - b_\alpha(x) \cdot \nabla u(x) - f_\alpha(x) \right\} = 0 \tag{5.3}$$

où $\partial_{ij} u$ représentent les dérivées secondes de la fonction u. Enfin, il se peut que le critère J ne prenne en compte que ce qui se passe jusqu'à un temps T (qui peut être un temps d'arrêt en contrôle stochastique). Dans ce cas, ce sont des équations d'évolution qui sont associées aux différents problèmes.

5.1.2 Mouvements de fronts

Nous verrons dans la seconde partie du cours que si l'on veut modéliser le mouvement d'interfaces en prescrivant la vitesse à laquelle "bougent" ces interfaces le long de leur normale, des équations du type suivant apparaîssent :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(x)|\nabla u| = 0 \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - |\nabla u| \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = 0 \tag{5.5}$$

avec une condition initiale *ad hoc*. Remarquer qu'il y a un problème de définition pour la seconde équation lorsque le gradient de u s'annule. On dit qu'elle est *singulière*.

5.1.3 Le laplacien infini

Voici encore un exemple d'équation aux dérivées partielles "pathologique" :

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_{ij}u\,\partial_i u\,\partial_j u = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ u = \phi \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Cette équation apparaît lorsque l'on essaie d'étendre une fonction lipschitzienne $\phi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ en une fonction u définie sur Ω tout entier, qu'on impose que "la constante de Lipschitz de u soit la plus petite possible et ce sur tout sous-domaine $\Omega' \subset \Omega$". On pourra consulter [28] pour plus de détails.

5.1.4 Forme générale des équations pour la théorie

Tous les exemples précédents donnent des EDP de la forme (équations stationnaires)

$$F(D^2u, Du, u, x) = 0 \qquad \text{dans } \Omega$$

ou bien de la forme (équations d'évolution)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + F(D^2u, Du, u, x) = 0 \qquad \text{dans } \Omega$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $F : \mathcal{S}_N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ est tel que pour tout $(X, Y, p, u, x) \in \mathcal{S}_N \times \mathcal{S}_N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \Omega$,

$$X \geq Y \Rightarrow F(X, p, u, x) \leq F(Y, p, u, x). \tag{5.7}$$

Cette dernière condition s'appelle *condition d'ellipticité* ou *condition d'ellipticité dégénérée*. Cette décroissance par rapport à X sera essentielle à toute la théorie des solutions de viscosité. On constate donc immédiatement que résoudre $F(D^2u, \nabla u, u, x) = 0$ ne sera pas du tout identique à résoudre $-F(D^2u, \nabla u, u, x) = 0$ (en fait, sauf cas particulier comme une indépendance par rapport à D^2u, une seule de ces équations sera abordable par la théorie).
Les solutions de viscosité sont essentiellement destinées à résoudre les équations non-linéaires d'ordre 1 ou 2, éventuellement dégénérées, qu'elles soient elliptiques ou paraboliques. Expliquons cela un peu plus en détails.
Le cas d'équations aux dérivées partielles le plus simple est le cas *linéaire*, c'est-à-dire les équations de la forme :

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) - \operatorname{div}(b(x)u) - c(x)u = d(x) \tag{5.8}$$

ou de la forme :

$$-\operatorname{tr}(A(x)D^2u) - b(x)\cdot\nabla u - c(x)u = d(x) \tag{5.9}$$

où $A(x)$ est une matrice symétrique, b est un champ de vecteurs et c et d sont deux fonctions. Nous avons vu des équations de la forme (5.8) dans la première partie de ce cours ; on dit que l'équation (5.8) est *sous forme conservative*, contrairement à (5.9) (on dit que (5.9) est sous forme *non conservative*). Si les coefficients sont suffisamment réguliers, on peut passer d'une forme à l'autre. Par ailleurs, on peut en général se ramener au cas d'une matrice symétrique si ce n'est pas le cas. Les solutions de viscosité utilisent la forme non conservative.
Dans la première partie du cours, nous avons aussi rencontré des équations *non linéaires* :

$$-\operatorname{div}(a(x, u, \nabla u)) = f.$$

Dans les exemples que nous venons de donner, les équations (5.1), (5.2) et (5.4) sont non linéaires d'ordre 1 (sous forme non conservative) ; l'équation (5.3) est aussi non-linéaire, mais est d'ordre 2. Il existe des équations qui, bien que non-linéaires, sont un peu plus sympathiques. C'est le cas des *équations semi-linéaires*

$$-\mathrm{tr}\,(A(x)\nabla u) + H(\nabla u, u, x) = 0,$$

ou des *équations quasi-linéaires*

$$-\mathrm{tr}\,(A(x, \nabla u)\nabla u) + H(\nabla u, u, x) = 0.$$

En ce qui concerne (5.6), l'équation du Laplacien infini, la matrice $A(x, \nabla u) = A_1(\nabla u)$ est $\nabla u \otimes \nabla u$ et pour l'équation géométrique (5.5), une fois mise sous forme non conservative :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{tr}\left(\left(I - \frac{\nabla u \otimes \nabla u}{|\nabla u|^2}\right) D^2 u\right) = 0$$

où I est la matrice identité, on a $A(x, \nabla u) = A_2(\nabla u) = I - \frac{\nabla u \otimes \nabla u}{|\nabla u|^2}$.
Une autre difficulté à surmonter, outre la non-linéarité de l'équation, est la dégénérescence des équations ; précisément, la condition d'uniforme ellipticité de la première partie (voir page 9) n'est plus satisfaite. Celle-ci imposait que les valeurs propres de A soit comprises entre deux valeurs strictement positives. Or la matrice $A_2(\nabla u)$ est dégénérée dans la direction ∇u et $A_1(\nabla u)$ est d'ordre 1, donc dégénérée dans $n-1$ directions ! Le lien entre la condition (5.7) et l'uniforme ellipticité de la première partie est le suivant : pour les équations linéaires (ainsi que pour les quasi-linéaires), la condition (5.7) est équivalente à la positivité de toutes les valeurs propres de la matrice A ; avec $A(x) = ((a_{i,j}(x)))_{i,j}$ positive pour tout x et le lemme 7.1, on montre que, lorsque $X \geq Y$, on a bien $-\mathrm{tr}(A(x)X) \leq -\mathrm{tr}(A(x)Y)$.

5.2 Difficultés

5.2.1 Trouver la bonne solution

Considérons

$$\begin{cases} |u'(x)| - 1 = 0 & x \in [0, 1] \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{5.10}$$

On constate immédiatement qu'il n'y a pas de solution régulière à (5.10) (par le théorème de Rolle, une telle solution devrait vérifier $u'(x) = 0$ pour un $x \in]0, 1[$). Il faut donc trouver une notion plus faible de solution.
On peut par exemple chercher $u \in W^{1,\infty}(0, 1)$, *i.e.* u lipschitzienne sur $[0, 1]$; une telle fonction sera, par le théorème de Rademacher, dérivable presque partout et on peut donc lui demander de vérifier $|u'(x)| = 1$ pour presque tout $x \in]0, 1[$. On se heurte alors au problème suivant : toute fonction de la forme indiquée dans la figure 5.1 (toutes les pentes étant $+1$ ou -1) est solution du problème. On perd l'unicité ! Assurer l'unicité de la solution d'une EDP est un enjeu majeur.

FIGURE 5.1 – Exemple de solution au sens “Lipschitz” pour (5.10).

Une autre idée consiste à résoudre

$$\begin{cases} -\varepsilon u_\varepsilon''(x) + |u_\varepsilon'(x)| - 1 = 0 & x \in]0, 1[\\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0\,, \end{cases} \tag{5.11}$$

problème pour lequel on sait obtenir aisément une solution unique, puis à essayer de voir si, lorsque $\varepsilon \to 0$, la fonction u_ε ne tendrait pas vers une fonction qui serait solution de (5.10) en un sens suffisamment fort pour assurer l'unicité.

5.2.2 Passage à la limite

Considérons une équation d'ordre 1 stationnaire générale :

$$H(\nabla u, u, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{5.12}$$

à laquelle on adjoint des conditions aux limites *ad hoc* (ce qui est en soit tout un problème, voir 5.2.3), que l'on cherche à approcher en utilisant la méthode de viscosité évanescente présentée ci-dessus :

$$-\varepsilon\Delta u_\varepsilon + H(\nabla u_\varepsilon, u_\varepsilon, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

(toujours avec des conditions au bord adaptées).
Dans les cas standards, on va savoir prouver que u_ε est de classe C^2 avec des estimations indépendantes de ε sur les normes infinies de u_ε et ∇u_ε. On peut alors dire que $u_\varepsilon \to u$ uniformément (sur les bornés) et que $\nabla u_\varepsilon \to \nabla u$ dans L^∞ faible-$*$, ce qui n'est absolument pas suffisant pour passer à la limite dans l'équation et voir que u vérifie (5.12).

5.2.3 Conditions au bord

Si on considère une simple équation linéaire avec une condition de Dirichlet

$$\begin{cases} -b(x)\cdot\nabla u(x) = 0 & x \in \Omega \\ u(x) = g(x) & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{5.13}$$

on sait très bien (le cas de la dimension $N = 1$ le montre déjà) que l'on ne peut en fait imposer u sur tout le bord de Ω, uniquement sur les zones où le champ de vecteurs b (et donc les caractéristiques) est "rentrant". Ceci est simple dans le cas linéaire... mais pour des équations non-linéaires comme (5.12), c'est beaucoup moins trivial (voir par exemple [5] pour le cas des lois de conservation — attention, ces équations ne rentreront pas dans le cadre de la théorie des solutions de viscosité).

5.3 Solutions de viscosité : définitions et propriétés

5.3.1 Définitions pour un hamiltonien continu

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $F : \mathcal{S}_N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ continue décroissante par rapport à sa première variable. Supposons que u est une solution régulière de

$$F(D^2u, \nabla u, u, x) = 0 \qquad \text{dans } \Omega. \tag{5.14}$$

Prenons φ régulière telle que $u - \varphi$ atteigne un minimum en $x_0 \in \Omega$. Alors on a $\nabla(u-\varphi)(x_0) = 0$ et $D^2(u-\varphi)(x_0) \geq 0$, soit $\nabla u(x_0) = \nabla\varphi(x_0)$ et $D^2u(x_0) \geq D^2\varphi(x_0)$. La décroissance de F par rapport à sa première variable donne alors $F(D^2\varphi(x_0), \nabla\varphi(x_0), u(x_0), x_0) \geq F(D^2u(x_0), \nabla u(x_0), u(x_0), x_0) = 0$.

Ceci motive la définition suivante.

Définition 5.1 (Solution de viscosité — définition par les fonctions-test) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $F : \mathcal{S}_N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ continue vérifiant (5.7) et $u : \Omega \to \mathbb{R}$.*

i) u est une sous-solution de viscosité *de (5.14) si u est semi-continue supérieurement (ci-après "scs") et si, pour tout $\varphi \in C^2(\Omega)$ tel que $u - \varphi$ atteint un maximum local en x_0, on a*

$$F(D^2\varphi(x_0), \nabla\varphi(x_0), u(x_0), x_0) \leq 0.$$

ii) u est une sur-solution de viscosité *de (5.14) si u est semi-continue inférieurement (ci-après "sci") et si, pour tout $\varphi \in C^2(\Omega)$ tel que $u - \varphi$ atteint un minimum local en x_0, on a*

$$F(D^2\varphi(x_0), \nabla\varphi(x_0), u(x_0), x_0) \geq 0.$$

iii) u est une solution de viscosité *de (5.14) si elle est une sur- et sous-solution de viscosité de (5.14).*

La seconde définition est basée sur la notion de sous-différentiel d'ordre deux d'une fonction en un point.

Définition 5.2 (Sous-différentiel d'ordre 2) *Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ sci. Le sous-différentiel $D^{2,-}u(x_0)$ d'ordre 2 de u en $x_0 \in \Omega$ est l'ensemble des couples $(p, X) \in \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}_N$ tels que, pour tout $y \in \Omega$,*

$$u(x) \geq u(x_0) + p \cdot (y - x_0) + \frac{1}{2} X(x - x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|^2).$$

Remarque 5.1 *i) Trouver un sous-différentiel d'ordre 2 consiste donc à mettre, à une erreur d'ordre supérieur près, une parabole sous le graphe de u, parabole qui colle au graphe en x_0.*
ii) De la même manière, pour une fonction scs, on définit le sur-différentiel d'ordre 2, noté $D^{2,+}u(x_0)$, en inversant l'inégalité.
iii) Si u est régulière alors $D^{2,-}u(x_0) = \{(\nabla u(x_0), X)\,,\ X \in \mathcal{S}_N$ telle que $X \leq D^2 u(x_0)\}$.

On a alors une nouvelle définition des solutions de viscosité, équivalente à la précédente :

Définition 5.3 (Solution de viscosité — définition par les sous- et sur-différentiels d'ordre 2) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $F : \mathcal{S}_N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ continue vérifiant (5.7) et $u : \Omega \to \mathbb{R}$.*
i) u est une sous-solution de viscosité de (5.14) si u est scs et si, pour tout $x_0 \in \Omega$ et tout $(p, X) \in D^{2,+}u(x_0)$, on a $F(X, p, u(x_0), x_0) \leq 0$.
ii) u est une sur-solution de viscosité de (5.14) si u est sci et si, pour tout $x_0 \in \Omega$ et tout $(p, X) \in D^{2,-}u(x_0)$, on a $F(X, p, u(x_0), x_0) \geq 0$.
iii) u est une solution de viscosité de (5.14) si elle est une sur- et sous-solution de viscosité de (5.14).

L'équivalence entre les définitions 5.1 et 5.3 est une conséquence de la caractérisation des sous-différentiels d'ordre 2 en termes de fonctions-test (voir Proposition 7.1 en annexe).
Dans la suite de cours, nous dirons indistinctement que u est une solution de (5.14) ou que u est solution de $F = 0$.

Remarque 5.2 *i) On peut déjà voir l'intérêt des solutions de viscosité sur la sélection d'une solution au problème (5.10). En effet, si on prend une solution ayant un pic vers le bas (comme dans la figure 5.1), en ce pic on a $D^{2,-}u(x_0) = [-1, 1] \times \mathcal{S}_N$ et on voudrait donc, pour que u soit sur-solution, $|p| - 1 \geq 0$ pour tout $p \in [-1, 1]$, ce qui n'est pas le cas. La notion de solution de viscosité élimine donc, dans ce problème, toutes les fonctions ayant des pics vers le bas, et il ne reste donc plus qu'une solution possible, celle de la figure 5.2.*

Figure 5.2 – Solution de viscosité pour (5.10).

ii) De même, il a été signalé que, au sens des solutions de viscosité, résoudre $F(D^2u, \nabla u, u, x) = 0$ n'etait pas du tout équivalent à résoudre $-F(D^2u, \nabla u, u, x) = 0$; d'une part parce que $-F$ ne vérifie pas forcément (5.7), mais l'exemple (5.10) (dans lequel F est indépendant de D^2u, donc F et $-F$ sont toutes les deux elliptiques) donne une autre justification à ceci. En effet, si l'on tente de sélectionner, avec les solutions de viscosité, une solution à

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1 - |u'(x)| = 0 & x \in]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{array} \right. \tag{5.15}$$

(ce qui revient à transformer F en $-F$ par rapport à (5.10)), on s'aperçoit bien qu'on trouve la fonction de la figure 5.3, c'est-à-dire l'opposée de la solution de (5.10) trouvée ci-dessus.

FIGURE 5.3 – Solution de viscosité pour (5.15).

5.3.2 Premières propriétés

En utilisant notamment la caractérisation des sous-différentiels, on peut démontrer la proposition suivante.

Proposition 5.1 *Dans la définition 5.1, on peut, sans changer les notions de sous- et sur-solution de viscosité, remplacer*
i) "$\varphi \in C^2(\Omega)$" par "$\varphi \in C^\infty(\Omega)$".
ii) "$\varphi \in C^2(\Omega)$" par "$\varphi \in C^1(\Omega)$", lorsque l'équation est d'ordre 1 (F ne dépend pas de D^2u).
iii) "maximum/minimum local" par "maximum/minimum local strict".
iv) "maximum/minimum local" par "maximum/minimum global strict".

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 5.1 :
Les deux dernières assertions sont une conséquence directe de la définition équivalente des solutions de viscosité en terme de sous-différentiels (Définition 5.3) et de la caractérisation de ces sous-différentiels présentée en annexe (Proposition 7.1).
Considérons *i)*, en supposant que u est une sur-solution lorsque l'on prend des fonctions-test dans C^∞. Soit φ de classe C^2 telle que $u-\varphi$ atteigne un maximum local en x_0. On a $\varphi(x) = \varphi(x_0) + \nabla\varphi(x_0)\cdot(x - x_0) + \frac{1}{2}D^2\varphi(x_0)(x-x_0)\cdot(x-x_0) + o(|x-x_0|)^2$ donc, en prenant $\varepsilon > 0$, la fonction

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \varphi(x_0) + \nabla\varphi(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2}(D^2\varphi(x_0)+\varepsilon I)(x-x_0)\cdot(x-x_0)\\ &= \varphi(x_0) + \nabla\varphi(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2}D^2\varphi(x_0)(x-x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\varepsilon}{2}|x-x_0|^2\end{aligned}$$

est supérieure à φ dans un voisinage de x_0. Ainsi, dans un voisinage de x_0, on a $u(x)-\psi(x) \leq u(x)-\varphi(x) \leq u(x_0)-\varphi(x_0) = u(x_0)-\psi(x_0)$. Donc $u-\psi$ atteint un maximum local en x_0 et puisque ψ est C^∞, on a

$$F(D^2\psi(x_0), \nabla\psi(x_0), u(x_0), x_0) = F(D^2\varphi(x_0)+\varepsilon I, \nabla\varphi(x_0), u(x_0), x_0) \geq 0.$$

Ceci étant vrai pour tout ε et F étant continue, on peut passer à la limite $\varepsilon \to 0$ pour voir que u est aussi sur-solution lorsque l'on prend des fonctions-test qui ne sont que C^2.

Pour *ii)*, l'astuce est différente car il est en général impossible, si on a une fonction φ de classe C^1, de mettre une fonction de classe C^2 au dessus et qui colle à φ en un point donné (contrairement au raisonnement précédent dans lequel on a pu coller une fonction C^∞ au dessus d'une fonction C^2).
Soit u une sur-solution lorsque l'on considère des fonctions-test C^2, avec F cependant indépendant de D^2u. Soit φ de classe C^1 tel que $u-\varphi$ a un minimum local en x_0 ; en utilisant iii), on peut se ramener au cas où ce minimum local est strict et nul (quitte à ajouter une constante à φ).
Soit maintenant $\varphi_n \in C^2(\Omega)$ (on peut même les prendre C^∞) qui converge vers φ localement uniformément, avec leurs dérivées premières (une telle suite peut par exemple être construite par convolution). Pour $r > 0$ assez petit, x_0 est un minimum local strict nul de $u-\varphi$ sur $B(x_0,r)$; on a, puisque u est sci, $a = \inf_{\partial B(x_0,r)}(u-\varphi) > 0$ et, pour un n_r assez grand, $\sup_{\partial B(x_0,r)}|\varphi_{n_r}-\varphi| < a/2$, $u(x_0)-\varphi_{n_r}(x_0) < a/2$. Pour ce n_r, $\inf_{\overline{B}(x_0,r)}(u-\varphi_{n_r}) < a/2$ n'est pas atteint sur $\partial B(x_0,r)$ (sur lequel

$u-\varphi_{n_r} = u-\varphi+\varphi-\varphi_{n_r} \geq a-a/2 \geq a/2)$; notons $x_r \in B(x_0,r)$ un point ou ce minimum est atteint : il s'agit donc d'un minimum local (sur $B(x_0,r)$ voisinage de x_r) de $u-\varphi_{n_r}$ et on a

$$F(\nabla\varphi_{n_r}(x_r), u(x_r), x_r) \geq 0. \tag{5.16}$$

Lorsque $r \to 0$, on a $x_r \to x_0$ (car $x_r \in B(x_0,r)$) et $\nabla\varphi_{n_r} \to \nabla\varphi$ localement uniformément (on prend n_r qui tend vers l'infini quand $r \to 0$), donc $\nabla\varphi_{n_r}(x_r) \to \nabla\varphi(x_0)$ ($\nabla\varphi$ est continue). De plus,

$$u(x_r) = \varphi_{n_r}(x_r) + \inf_{B(x_0,r)}(u-\varphi_{n_r}) \leq \varphi_{n_r}(x_r) + \inf_{B(x_0,r)}(u-\varphi) + \sup_{B(x_0,r)}|\varphi-\varphi_{n_r}|$$

et $\inf_{B(x_0,r)}(u-\varphi) = 0$. Ainsi, par convergence locale uniforme de φ_{n_r} vers φ, on a $\limsup_{r\to 0} u(x_r) \leq \varphi(x_0) = u(x_0)$. Comme u est sci, on a aussi $u(x_0) \leq \liminf_{r\to 0} u(x_r)$, et donc finalement $u(x_r) \to u(x_0)$ lorsque $r \to 0$. On peut donc passer à la limite dans (5.16) pour voir que $F(\nabla\varphi(x_0), u(x_0), x_0) \geq 0$. ■

Soit u une sur-solution de viscosité de $F=0$; supposons que l'on ait $x_n \to x$, $u(x_n) \to u(x)$ et $(p_n, X_n) \in D^{2,-}u(x_n)$ tels que $(p_n, X_n) \to (p, X)$. Alors on peut passer à la limite sur $F(X_n, p_n, u(x_n), x_n) \geq 0$ pour voir que $F(X, p, u(x), x) \geq 0$. Ainsi, dans la définition 5.3, on peut remplacer $D^{2,-}u(x)$ par un sous-différentiel "plus gros", appelé parfois *sous-différentiel limite*, à savoir

$$\begin{aligned}\overline{D}^{2,-}u(x) \quad &= \Big\{(p,X) \mid \exists x_n \text{ et } (p_n,X_n) \in D^{2,-}u(x_n) \\ &\qquad \text{vérifiant } (X_n,p_n,u(x_n),x_n) \to (X,p,u(x),x)\Big\}.\end{aligned} \tag{5.17}$$

5.3.3 Le cas d'un hamiltonien discontinu

Supposons que notre hamiltonien $F : \mathcal{S}_N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ ne soit plus continu mais seulement localement borné. On définit alors

$$F_*(X,p,u,x) = \liminf_{(Y,q,r,y)\to(X,p,u,x)} F(Y,q,r,y)$$

et

$$F^*(X,p,u,x) = \limsup_{(Y,q,r,y)\to(X,p,u,x)} F(Y,q,r,y).$$

Ces fonctions sont appelées respectivement "régularisée sci" et "régularisée scs" de F (F_* est effectivement sci, et F^* est bien scs).
Si $(X_n, p_n, u(x_n), x_n) \to (X, p, u(x), x)$ et $F(X_n, p_n, u(x_n), x_n) \geq 0$, on a donc $F^*(X, p, u(x), x) \geq 0$. Vu (5.17), cela nous amène à prendre la définition suivante de solution de viscosité lorsque F n'est pas continue (cette notion de solution coincidant avec celles déjà introduites lorsque F est continue).

Définition 5.4 (Solution de viscosité — cas d'un hamiltonien discontinu) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $F : \mathcal{S}_N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ localement bornée vérifiant (5.7) et $u : \Omega \to \mathbb{R}$.*
i) u est une sous-solution de viscosité *de (5.14) si u est scs et si, pour tout $x_0 \in \Omega$ et tout $(p,X) \in D^{2,+}u(x_0)$, on a $F_*(X,p,u(x_0),x_0) \leq 0$.*
ii) u est une sur-solution de viscosité *de (5.14) si u est sci et si, pour tout $x_0 \in \Omega$ et tout $(p,X) \in D^{2,-}u(x_0)$, on a $F^*(X,p,u(x_0),x_0) \geq 0$.*
iii) u est une solution de viscosité *de (5.14) si elle est une sur- et sous-solution de viscosité de (5.14).*

Remarque 5.1 *En guise d'hamiltonien discontinu important, on peut citer celui intervenant dans le mouvement par courbure moyenne (que nous verrons plus loin). L'EDP associée à ce mouvement est*

$$\partial_t u - \Delta u + \frac{D^2 u \nabla u \cdot \nabla u}{|\nabla u|^2} = 0$$

et l'hamiltonien correspondant est $F(X,p,u,x) = -\mathrm{tr}(X) + \frac{Xp\cdot p}{|p|^2} = -\mathrm{tr}((I - \frac{p\otimes p}{|p|^2})X)$, qui est bien localement borné mais discontinu (en fait même pas défini) en 0. On trouve $F^*(X,0) = -\mathrm{tr}(X) + \lambda_{\max}(X))$ et $F_*(X) = -\mathrm{tr}(X) + \lambda_{\min}(X))$, où $\lambda_{\min}(X))$ et $\lambda_{\max}(X))$ désignent respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de X.

5.4 Stabilité discontinue

Soit u^ε solution de $F^\varepsilon = 0$ dans Ω. Supposons que l'on sache que $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ et $(F^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ sont localement bornés. Que peut-on dire lorsque $\varepsilon \to 0$? C'est ce que nous allons essayer de voir ici, et cette question est bien sûr à mettre en parallèle avec la sous-section 5.2.2.

5.4.1 Les semi-limites relaxées

Définition 5.5 (Semi-limites relaxées) *Soit $(z^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une famille localement bornée de fonctions. On définit*

$$(\liminf{}_* z^\varepsilon)(x) = \liminf_{(\varepsilon,y)\to(0,x)} z^\varepsilon(y)$$

et

$$(\limsup{}^* z^\varepsilon)(x) = \limsup_{(\varepsilon,y)\to(0,x)} z^\varepsilon(y).$$

Remarque 5.3 *i) On peut voir que $\liminf_* z^\varepsilon$ est sci et que $\limsup^* z^\varepsilon$ est scs.*
ii) On a $\liminf_* z^\varepsilon = \limsup^* z^\varepsilon = z$ si et seulement si $z^\varepsilon \to z$ localement uniformément.

Théorème 5.1 *Soit u^ε sous-solution de $F^\varepsilon = 0$ dans Ω, avec F^ε vérifiant (5.7). On suppose que $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ et $(F^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ sont des familles localement bornées. Alors $\overline{u} = \limsup^* u^\varepsilon$ est sous-solution de $\underline{F} = 0$ où $\underline{F} = \liminf_* F^\varepsilon$.*

Remarque 5.4 *i) Bien sr, on peut établir un théorème similaire pour des sur-solutions en intervertissant $\liminf_*$ et $\limsup^*$.*
ii) Si F^ε ne dépend pas de ε, alors $\underline{F} = F_*$, et ces quantités sont égales à F lorsque cette fonction est continue.

Démonstration du théorème 5.1 :
La preuve est une conséquence plus ou moins immédiate du lemme 7.4. Soit $x_0 \in \Omega$ et $(p, X) \in D^{2,+}\overline{u}(x_0)$. On se donne x_n, ε_n et (p_n, X_n) comme dans le lemme 7.4. Alors, u^{ε_n} étant sous-solution de $F^\varepsilon = 0$, on a $F^{\varepsilon_n}(X_n, p_n, u^{\varepsilon_n}(x_n), x_n) \leq 0$. On peut alors prendre la $\liminf_*$, puisque $(X_n, p_n, u^{\varepsilon_n}(x_n), x_n) \to (X, p, \overline{u}(x_0), x_0)$, et trouver donc

$$\underline{F}(X, p, \overline{u}(x_0), x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} F^{\varepsilon_n}(X_n, p_n, u^{\varepsilon_n}(x_n), x_n) \leq 0$$

ce qui prouve bien que $\overline{u}$ est une sous-solution de $\underline{F} = 0$. ∎

5.4.2 Le supremum d'une famille de sous-solutions

De même que l'on peut considérer les semi-limites relaxées d'une famille de sous- ou sur-solutions, on peut considérer le supremum d'une famille de sous-solutions ou l'infimum d'une famille de sur-solutions. Ceci sera particulièrement utile lorsque nous construirons une solution de viscosité pour l'équation (5.5) par la *méthode de Perron.*

Théorème 5.2 *Soit $(u^\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille de sous-solutions de $F = 0$ dans Ω, avec F elliptique dégénéré (condition (5.7)). On suppose que $(u^\alpha)_{\alpha\in A}$ est une famille uniformément localement bornée supérieurement. Alors la fonction scs*

$$\tilde{u} = \left(\sup_{\alpha\in A} u_\alpha\right)^*$$

est sous-solution de $F = 0$.

Remarque 5.5 *i) Comme à chaque fois, on peut établir un théorème similaire pour des sur-solutions.*
ii) Comme dans le théorème précédent, nous aurions pu aussi considérer une famille d'équations. Nous avons préféré simplifier l'énoncé et laisser le soin au lecteur de généraliser ce résultat.

La démonstration de ce théorème est tout à fait similaire à celle du théorème relatif aux semi-limites relaxées. Elle repose sur le lemme 7.5.

5.4.3 Conditions aux limites et initiale

Bien que nous ne traitions pas ce problème dans la suite du cours, l'énoncé du théorème de stabilité discontinu est l'occasion d'évoquer le problème du passage à la limite dans les conditions aux limites.
Considérons une fonction continue u_b, un domaine borné Ω et une famille de solutions u^ε d'équations $F^\varepsilon = 0$ dans Ω et telles que $u^\varepsilon = u_b$ sur $\partial\Omega$. Sous l'hypothèse que les familles de solutions et d'hamiltoniens sont localement bornées, les semi-limites relaxées supérieure $\overline{u}$ et inférieure $\underline{u}$ vérifient bien l'équation à l'intérieur. En revanche, sur le bord, c'est soit l'équation, soit la condition de Dirichlet qui aura lieu. Nous ne rentrerons pas plus dans le détail mais ce problème est lié aux "couches limites" ; dans le cadre que nous nous sommes fixés, il faut alors construire des "barrières" pour assurer que la condition aux limites $u^\varepsilon = u_b$ sur $\partial\Omega$ est bien satisfaite.
Le même phénomène a lieu dans le cas des équations d'évolution, si l'on voit la condition initiale comme une condition de Dirichlet sur une partie du bord parabolique. Ainsi nous construirons des "barrières" pour l'équation (5.5) pour assurer que la condition initiale est satisfaite.

5.5 Introduction aux principes de comparaison

Dans la théorie des solutions de viscosité, on prouve souvent bien plus que l'unicité de la solution. En général, disons dans les cas les plus favorables, toute sous-solution de l'équation est majorée par toute sur-solution. On parle alors de "principe de comparaison", ou bien d' "unicité forte". Dans l'énoncé d'un principe de comparaison, il faut préciser en quel sens les conditions initiales et/ou au bord sont prises en compte et la régularité des semi-solutions qu'on compare. L'idéal est de pouvoir comparer des sous- et sur-solutions semi-continues.
Dans la seconde partie de ce mini-cours, nous prouverons un principe de comparaison pour le problème d'évolution de fronts par courbure moyenne et nous verrons comment gérer la condition initiale. L'équation est quasi-linéaire mais les coefficients ne dépendent que du gradient.
Notons enfin que les théorèmes de comparaison jouent un rôle central en solutions de viscosité car ils permettent également de prouver l'existence de solutions continues par la méthode de Perron. Cette méthode est issue de la théorie de potentiel et a été adaptée par Ishii [21] aux équations de Hamilton-Jacobi. C'est aujourd'hui le moyen le plus couramment utilisé pour construire des solutions de viscosité. Cette méthode consiste à d'abord construire une sous-solution et une sur-solution qui se comporte bien sur le bord (parabolique pour les équations d'évolution) : on construit alors une sous-solution maximale et on montre que c'est aussi une sur-solution. La partie difficile est de construire la sous- et la sur-solution. Nous appliquerons cette méthode dans la seconde partie de ce mini-cours.
Dans cette section, nous allons voir comment traiter le cas d'équations stationnaires du second ordre pour pouvoir le moment venu prouver le principe de comparaison pour l'équation géométrique. Nous verrons que le fait que l'équation dépende des dérivées secondes est une difficulté ; pour la surmonter, nous aurons besoin d'un lemme d'analyse non-lisse : le lemme de Ishii. Nous en profiterons pour traiter également le cas des équations dont les coefficients dépendent éventuellement de x, avec conditions de Dirichlet non homogènes sur un domaine borné Ω. Nous avons déjà signalé que la gestion des conditions au bord est un autre obstacle à surmonter. Ici, nous supposerons que la sous-solution est majorée par la sur-solution sur $\partial\Omega$.

5.5.1 Une équation du premier ordre

Pour comprendre la première étape de la démonstration d'un principe de comparaison (le dédoublement des variables), nous commençons par traiter le cas simple d'une équation du premier ordre de la forme :

$$u + H(x, \nabla u) = 0 \text{ dans } \Omega \tag{5.18}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et H un hamiltonien Lipschitz en x tel que pour tout $x, p \in \mathbb{R}^N$:
(H). $|\partial_x H(x,p)| \leq C(1 + |p|)$.

Théorème 5.3 *Soit u et v une sous- et une sur-solution de (5.18). Supposons que $u \leq v$ sur le bord de Ω. Alors $u \leq v$ sur Ω tout entier.*

Démonstration : Comme u est scs et v est sci sur $\overline{\Omega}$ compact, $M = \sup_{\overline{\Omega}}(u - v)$ est fini et atteint. On veut prouver que $M \leq 0$. On va donc supposer $M > 0$ et en tirer une contradiction. On raisonne en deux temps : tout d'abord on dédouble les variables et on étudie la pénalisation introduite. Ensuite on écrit les inégalités de viscosité correspondant à u et v et on exhibe une contradiction.

Première étape : dédoublement des variables par pénalisation.
On commence par approcher M par

$$M_\varepsilon = \sup_{(x,y)\in\overline{\Omega}^2} \left\{ u(x) - v(y) - \frac{1}{2\varepsilon}|x-y|^2 \right\}.$$

Toujours par semicontinuité supérieure de u et inférieure de v (et la compacité de $\overline{\Omega}$), ce supremum est fini et atteint, disons en $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$. Etablissons les quelques résultats de pénalisation suivants :

$$|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2 = o(\varepsilon)\,, \tag{5.19}$$

$$\begin{array}{l} \exists \overline{x} \in \Omega \text{ tel que, à une sous-suite près, } (x_\varepsilon, y_\varepsilon) \to (\overline{x}, \overline{x}) \text{ et} \\ \lim_{\varepsilon\to 0}(u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon\to 0} M_\varepsilon = M. \end{array} \tag{5.20}$$

Pour voir cela, on commence par constater que $M_\varepsilon \geq M$ (car $\sup_{(x,y)} \geq \sup_{x=y}$). De plus, $(M_\varepsilon)_\varepsilon$ est croissant en ε (puisque $-\frac{1}{2\varepsilon}|x-y|^2 \leq -\frac{1}{2\varepsilon'}|x-y|^2$ lorsque $\varepsilon \leq \varepsilon'$), donc $M_\varepsilon \to L$ lorsque $\varepsilon \to 0$, avec $L \geq M$. On a

$$\begin{aligned} M_{2\varepsilon} &\geq u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) - \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{4\varepsilon} \\ &\geq u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) - \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{2\varepsilon} + \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{4\varepsilon} \\ &= M_\varepsilon + \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{4\varepsilon} \end{aligned}$$

donc $|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2 \leq 4\varepsilon(M_{2\varepsilon} - M_\varepsilon)$ et (5.19) découle de la convergence de M_ε lorsque $\varepsilon \to 0$.
(5.19) implique tout de suite que M_ε et $u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon)$ ont même limite quand $\varepsilon \to 0$.
Quitte à extraire une suite, $(x_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(y_\varepsilon)_\varepsilon$ convergent dans $\overline{\Omega}$, et (5.19) montre que leurs limites sont identiques : notons-la $\overline{x}$. Or, par le caractère scs de u et sci de v, et puisque $|x_\varepsilon - y_\varepsilon|/\varepsilon \to 0$,

$$M \leq L = \lim_{\varepsilon\to 0} M_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) - \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{2\varepsilon} \right) \leq u(\overline{x}) - v(\overline{x}) \leq M.$$

Cela prouve donc que $\overline{x}$ est un point qui réalise M et qu'il est donc dans Ω (on a supposé $M > 0$ et $u \leq v$ sur $\partial\Omega$, donc M ne peut être atteint sur le bord de l'ouvert), ce qui conclut la preuve de (5.20).

Seconde étape : combinaison des inégalités de viscosité.
Voyons maintenant comment obtenir des inégalités de viscosité. On remarque que la fonction $x \to u(x) - v(y_\varepsilon) - \frac{|x-y_\varepsilon|^2}{2\varepsilon}$ atteint un maximum sur Ω en x_ε. Comme $x_\varepsilon \to \overline{x} \in \Omega$, on est sûr que pour ε assez petit, le maximum n'est pas atteint au bord. Donc

$$u(x_\varepsilon) + H(x_\varepsilon, p_\varepsilon) \leq 0$$

avec $p_\varepsilon = \frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon}$. De même :

$$v(y_\varepsilon) + H(y_\varepsilon, p_\varepsilon) \geq 0.$$

En soustrayant ces deux inégalités et en utilisant l'hypothèse (H) on obtient :

$$u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) \leq H(y_\varepsilon, p_\varepsilon) - H(x_\varepsilon, p_\varepsilon) \leq C(1 + |p_\varepsilon|)|x_\varepsilon - y_\varepsilon| = C\left(|x_\varepsilon - y_\varepsilon| + \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{\varepsilon} \right).$$

Or on a montré que le membre de gauche tendait vers M et que le membre de droite tendait vers 0. On obtient donc la contradiction suivante : $M \leq 0$. ∎

5.5.2 Une équation du second ordre ; le lemme d'Ishii

On voudrait appliquer la même technique pour prouver un théorème de comparaison pour une équation du type :

$$u + F(D^2u) = f \text{ dans } \Omega \tag{5.21}$$

avec F elliptique dégénéré (voir condition (5.7)) et f continue.

Théorème 5.4 *Soit u et v respectivement sous- et sur-solution de (5.21) dans Ω. Supposons que $u \leq v$ sur le bord de Ω. Alors $u \leq v$ sur Ω tout entier.*

Démonstration : On raisonne comme précédemment. La première étape est exactement la même. Passons donc directement à la seconde. Il s'agit d'écrire les inégalités de viscosité associées à u et v. On a : $(\frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}I) \in D^{2,+}u(x_\varepsilon)$ et $(\frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon}, -\frac{1}{\varepsilon}I) \in D^{2,-}v(y_\varepsilon)$.
Si on injecte ces valeurs de sur- et sous-différentiels dans l'équation, et en supposant que $F(X) = -\mathrm{tr}(X)$, on trouve

$$-\frac{N}{\varepsilon} + u(x_\varepsilon) \leq 0 \leq \frac{N}{\varepsilon} + v(y_\varepsilon) \quad \text{donc} \quad u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) \leq \frac{2N}{\varepsilon}$$

qui est une majoration grossière (donc inutile) de $u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon)$ dans la mesure où elle explose lorsque $\varepsilon \to 0$.
En fait, en traitant indépendamment l'information pour u et v, on en a perdu beaucoup ; en particulier, lorsque u et v sont réguliers, on a perdu le renseignement suivant (condition de maximalité à l'ordre 2) :

$$\begin{pmatrix} D^2u(x_\varepsilon) & 0 \\ 0 & -D^2v(y_\varepsilon) \end{pmatrix} \leq \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}.$$

Voila pourquoi il va falloir faire appel au lemme d'Ishii qui permet de récuperer ces informations dans le cas non-lisse.

Lemme 5.1 (Ishii) *Soit U et V ouverts de $\mathbb{R}^N$, $u : U \to \mathbb{R}$ scs et $v : V \to \mathbb{R}$ sci. Soit $\varphi : U \times V \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On suppose que $(x_1, x_2) \mapsto u(x_1) - v(x_2) - \varphi(x_1, x_2)$ a un maximum local en $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \in U \times V$ et on note $p_1 = D_{x_1}\varphi(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$, $p_2 = -D_{x_2}\varphi(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ et $A = D^2\varphi(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$. Alors, pour tout $\alpha > 0$ tel que $\alpha A < I$, il existe X et Y dans $\mathcal{S}_N$ tels que*

$$\begin{aligned} &(p_1, X) \in \overline{D}^{2,+}u(\overline{x}_1), \quad (p_2, Y) \in \overline{D}^{2,-}v(\overline{x}_2), \\ &-\frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq (I - \alpha A)^{-1}A. \end{aligned} \tag{5.22}$$

On cherche à appliquer le lemme d'Ishii à $\varphi(x, y) = \frac{|x-y|^2}{2\varepsilon}$. On a alors $A = \frac{1}{\varepsilon}\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}$ et on remarque que pour $\xi \in \mathbb{R}^N$, $(\xi, \xi) \cdot A(\xi, \xi) = 0$ donc $\xi \cdot X\xi \leq \xi \cdot Y\xi$ c'est-à-dire $X \leq Y$. Ainsi les inégalités de viscosité deviennent :

$$u(x_\varepsilon) + F(X) \leq f(x_\varepsilon) \qquad \text{et} \qquad v(y_\varepsilon) + F(Y) \geq f(y_\varepsilon)$$

donc en utilisant l'ellipticité de F, il vient :

$$u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) \leq f(x_\varepsilon) - f(y_\varepsilon).$$

On obtient alors la même contradiction que dans le cas de l'équation du premier ordre : $M \leq 0$. ■

Remarque 5.6 *i) La condition matricielle (5.22) dans $\mathbb{R}^{2N}$ peut être énoncée en utilisant le langage des formes quadratiques dans $\mathbb{R}^N$: pour tout $\xi, \eta \in R^N$,*

$$-\frac{1}{\alpha}(|\xi|^2 + |\eta|^2) \leq X\xi \cdot \xi - Y\eta \cdot \eta \leq (\xi, \eta) \cdot (I - \alpha A)^{-1}A(\xi, \eta).$$

Dans le cas particulier traité dans le théorème, en choisissant $\alpha = \varepsilon/3$, on montre facilement que $(I - \alpha A)^{-1}A \leq \frac{3}{\varepsilon}\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}$ et cette condition devient :

$$-\frac{3}{\varepsilon}(|\xi|^2 + |\eta|^2) \leq X\xi \cdot \xi - Y\eta \cdot \eta \leq \frac{3}{\varepsilon}|\xi - \eta|^2. \tag{5.23}$$

Il est alors facile de voir sur cette formule que $X \leq Y$.

ii) Le lemme d'Ishii peut être énoncé pour plus de deux fonctions. Ceci est parfois utile lorsque l'on veut prouver certaines propriétés de la solution d'une équation (convexité, estimation de la constante de Lipschitz, etc...).
iii) Si on regarde de près la démonstration du lemme d'Ishii, on remarque que la matrice $(I - \alpha A)^{-1}A$ qui apparaît dans l'inégalité matricielle est, en tant que forme quadratique, la régularisée par sup-convolution de A : A^α. On peut alors interpréter la condition (5.23) comme : $X \leq Y \Box A^\alpha$ où $\Box$ désigne l'inf-convolution de deux fonctions.

5.5.3 Cas modèle pour un hamiltonien dépendant de x

Nous énonçons enfin un principe de comparaison qui s'applique notamment aux équations quasi-linéaires. Ce théorème est très classique. La démonstration est tout à fait similaire à la démonstration précédente et nous laissons donc le soin au lecteur d'écrire les détails.

Théorème 5.5 *Soit Ω un ouvert borné et $F : \mathcal{S}_N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ continue telle que*

$$\exists \gamma > 0\,,\ F(X,p,u,x) - F(X,p,v,x) \geq \gamma(u-v) \tag{5.24}$$

et

$$\begin{array}{c}\exists \omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \text{ continue croissante nulle en } 0 \text{ telle que, } \forall (X,Y) \in \mathcal{S}_N\,,\ \forall \varepsilon > 0\,,\\ \text{si } -\frac{3}{\varepsilon}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq \frac{3}{\varepsilon}\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix},\\ \text{alors } F(Y, \frac{x-y}{\varepsilon}, u, y) - F(X, \frac{x-y}{\varepsilon}, u, x) \leq \omega\left(\frac{|x-y|^2}{\varepsilon} + |x-y|\right).\end{array} \tag{5.25}$$

Soit u une sous-solution de (5.14) scs sur $\overline{\Omega}$ et v une sur-solution de (5.14) sci sur $\overline{\Omega}$. Si $u \leq v$ sur $\partial\Omega$, alors $u \leq v$ dans Ω.

Remarque 5.7 *i) Remarquer que la condition matricielle qui apparaît dans (5.25) est exactement (5.23) exhibée dans la remarque 5.6.*
ii) (5.25) implique (5.7), mais ce n'est pas évident (voir le lemme 7.2 en annexe).
iii) Si F ne dépend pas de x, alors (5.25) est équivalent à (5.7) (voir aussi le lemme 7.2 en annexe).

Discussion de la condition (5.25)

- Considérons d'abord une **équation du premier ordre**, c'est-à-dire F indépendant de X. En posant $p = \frac{x-y}{\varepsilon}$, on voit qu'il suffit que F vérifie, pour tout $(p,u,x) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \Omega$,

  $$|F(p,u,x) - F(p,u,y)| \leq \omega(|x-y|(|p|+1)).$$

  L'hypothèse (H) de la sous-section 5.5.1 implique que l'inégalité ci-dessus est bien satisafaite.
- Prenons maintenant le cas d'une **équation semi-linéaire** : $F(X,p,u,x) = -\mathrm{tr}(A(x)X) + H(p)$ avec $A(x) = \sigma(x)\sigma(x)^T$ (puisque A est symétrique positive, on peut toujours l'écrire sous cette forme même si elle n'est pas naturellement donnée ainsi). En notant $(e_i)_{i\in[1,N]}$ la base canonique de $\mathbb{R}^N$, on a

  $$\begin{aligned} -\mathrm{tr}(A(y)Y) + \mathrm{tr}(A(x)X) &= -\mathrm{tr}(\sigma(y)^T Y \sigma(y)) + \mathrm{tr}(\sigma(x)^T X \sigma(x)) \\ &= \sum_{i=1}^N \sigma(x)^T X \sigma(x) e_i \cdot e_i - \sigma(y)^T Y \sigma(y) e_i \cdot e_i \\ &= \sum_{i=1}^N X(\sigma(x)e_i)\cdot(\sigma(x)e_i) - Y(\sigma(y)e_i)\cdot(\sigma(y)e_i). \end{aligned}$$

  Supposons que (X,Y) vérifie l'inégalité matricielle de (5.25), c'est-à-dire $X\xi\cdot\xi \leq Y\eta\cdot\eta + \frac{3}{\varepsilon}|\xi-\eta|^2$; alors, si σ est lipschitzienne, on trouve

  $$-\mathrm{tr}(A(y)Y) + \mathrm{tr}(A(x)X) = \frac{3}{\varepsilon}\sum_{i=1}^N |\sigma(x)e_i - \sigma(y)e_i|^2 \leq C\frac{|x-y|^2}{\varepsilon}$$

  et F vérifie bien (5.25).

– Dans le cas d'une **équation quasi-linéaire** : $F(X, p, u, x) = -\text{tr}(A(p)X)$, la simple positivité de $A(p)$ (pour tout p) implique (5.25) (mais on le sait déjà, puisque cette positivité est une CNS pour que F soit elliptique et, quand F est indépendant de x, l'ellipticité est équivalente à (5.25)).
Si on considère une équation quasi-linéaire avec dépendance en x, $F(X, p, u, x) = -\text{tr}(A(p, x)X)$, alors il suffit que $A(p, x)$ s'écrive sous la forme $\sigma(p, x)\sigma(p, x)^T$ avec σ lipschitzienne par rapport à x, uniformément par rapport à p.

5.6 Commentaires et bibliographie

Les paragraphes 5.2 et 5.5.3 de ce chapitre sont inspiré du polycopié du cours post-DEA que Guy Barles a donné à Toulouse en 1997 (il est disponible sur sa page Web).
La notion de solution de viscsosité a été introduite par Crandall et Lions au début des années 1980 [17, 23]. Pour une introduction approfondie à cette théorie, la référence reste [18], et [22] est un bon complément. Pour les équations d'ordre 1, le livre de Barles [15] est un incontournable. La définition par fonctions-test était plus volontiers utilisée pour les équations d'ordre 1, bien que la définition par sous-différentiel apparaîsse dès [17]. Nous avons fait le choix de présenter la théorie sous le jour de l'analyse non-lisse car il nous semble intéressant de comprendre à quel moment l'équation est vraiment utilisée (pour la stabilité discontinue, pour le supremum d'une famille de sous-solutions, pour le principe de comparaison *etc.*).
Des résultats de stabilité par passage à la limite locale uniforme sont présents dès [17]. La notion de semi-limites relaxées (et de stabilité discontinue qui lui est naturellement associé) est due à Barles et Perthame [26, 27]. Le principe de comparaison le plus général (Théorème 5.5) est tiré de [18].
Pour l'application de la théorie au contrôle optimal, on pourra notamment se référer à [15, 14] et [20].

Chapitre 6

Mouvements de fronts

6.1 L'approche par ensemble de niveau

Passage du problème géométrique à une EDP.
On cherche à modéliser l'évolution d'une interface Γ_t séparant à l'instant t un milieu intérieur I_t et un milieu extérieur O_t. On suppose que le front Γ_t évolue le long de la normale unitaire $n(x)$ sortant de I_t au point $x \in \Gamma_t$ avec une vitesse V égale à l'opposé de la courbure moyenne κ :

$$V = -\kappa. \tag{6.1}$$

Courbure moyenne d'une sous-variété.
Rappelons brièvement la définition de la courbure moyenne dans le cas qui nous intéresse. Pour ce faire, considérons une fonction $v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, deux fois différentiable et $\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R}^N : v(x) = 0\}$. L'ensemble $\mathcal{V}$ est une sous-variété de dimension $N-1$ (une hypersurface) de $\mathbb{R}^N$ si ∇v ne s'annule pas sur $\mathcal{V}$. Le champ de vecteurs $N(x) = \nabla v(x)/|\nabla v(x)|$, défini au moins dans un voisinage de $\mathcal{V}$, est *normal* à $\mathcal{V}$ en ce sens que pour tout $x \in \mathcal{V}$ et $d \in T_x\mathcal{V}$: $N(x) \cdot d = 0$.
On peut restreindre N à $\mathcal{V}$; on obtient une application $n : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^N$ dont on peut considérer la différentielle $Dn(x) : T_x\mathcal{V} \to \mathbb{R}^N$ en tout point $x \in \mathcal{V}$. On a construit n de telle sorte que $n(x) \cdot n(x) = 1$ pour tout $x \in \mathcal{V}$; en dérivant cette relation, on obtient pour tout $v \in T_x\mathcal{V}$: $Dn(x)(v) \cdot n(x) = 0$. Ceci permet de conclure que $Dn(x)(v) \in T_x\mathcal{V}$. Donc $Dn(x)$ est en fait un endomorphisme de l'espace tangent (application de Gauss). A ce titre, on peut considérer sa trace. C'est ce que l'on appelle la courbure moyenne de $\mathcal{V}$ en x. On la note $\kappa(x)$. Nous allons voir que $\kappa(x) = \operatorname{div} N(x)$. Considérons une base orthonormée de $\mathbb{R}^N$ dont le premier vecteur est $e_1 = N(x)$ et telle que $e_2, \ldots, e_N$ est une base orthonormée de $T_x\mathcal{V}$. On a d'une part

$$\kappa(x) = \operatorname{tr}(Dn(x)) = \sum_{i=2}^{N} Dn(x)(e_i) \cdot e_i = \sum_{i=2}^{N} DN(x)(e_i) \cdot e_i = \operatorname{div} N(x) - DN(x)(e_1) \cdot e_1.$$

Pour obtenir la troisième égalité, nous avons utilisé le fait que $n = N$ sur $\mathcal{V}$ et que $e_i \in T_x\mathcal{V}$ lorsque $i \geq 2$ (on dérive dans des directions tangeantes à $\mathcal{V}$, donc seules les valeurs de n sur $\mathcal{V}$ importent). Il nous reste donc à montrer que $DN(x)(e_1) \cdot e_1 = 0$. Il suffit pour cela d'utiliser la définition de e_1 et le fait que $N(x) \cdot N(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$: cela implique en particulier que $DN(x)(V) \cdot N(x) = 0$ pour tout $V \in \mathbb{R}^N$ donc $DN(x)(e_1) \cdot e_1 = 0$.

Obtention d'une équation aux dérivées partielles.
On commence par écrire le front initial comme l'ensemble de niveau zéro d'une fonction u_0 : $\Gamma_0 = \{x : u_0(x) = 0\}$. On peut alors définir l'intérieur (resp. l'extérieur) comme l'ensemble où $u_0 < 0$ (resp. $u_0 > 0$). On cherche alors le front à l'instant t sous la même forme : $\Gamma_t = \{x : u(t,x) = 0\}$. L'intérieur I_t et l'extérieur O_t sont alors respectivement définis comme $\{x : u(t,x) < 0\}$ et $\{x : u(t,x) > 0\}$.
Supposons pour un instant que Γ_t est une sous-variété (voir plus haut). Suivons alors l'évolution d'un point $x \in \Gamma_0$ au cours du temps. A l'instant t, il est en $x(t)$. D'après la loi géométrique (6.1), on a donc :

$$\dot{x}(t) = -\kappa(x(t))n(x(t)).$$

Nous avons vu plus haut que la courbure moyenne en x coïncide avec la divergence du champ de vecteurs $x \mapsto N(x)$:

$$\kappa(x(t)) = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)(x(t)).$$

Dérivons alors par rapport au temps la relation $u(t, x(t)) = 0$: $\partial_t u(t, x(t)) + \nabla u(t, x(t)) \cdot \dot{x}(t) = 0$. En utilisant l'expression de $\dot{x}$, on trouve $0 = \partial_t u(t, x(t)) - \kappa(x(t))|\nabla u(t, x(t))|$. En injectant alors l'expression de la courbure, on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - |\nabla u| \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = 0. \tag{6.2}$$

Ceci est la forme conservative de l'équation du mouvement par courbure moyenne. On calcule aisément $|\nabla u| \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = \operatorname{tr}[(I - \frac{\nabla u \otimes \nabla u}{|\nabla u|^2})D^2 u]$ et, en remplaçant dans (6.2), on obtient la forme non conservative de l'équation précédente :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{tr}\left[\left(I - \frac{\nabla u \otimes \nabla u}{|\nabla u|^2}\right) D^2 u\right] = 0. \tag{6.3}$$

ou encore $\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{tr}\left[A(\nabla u/|\nabla u|)D^2 u\right] = 0$ où $A(p) = I - p \otimes p$. La matrice A est bien toujours positive lorsque $|p| = 1$, mais elle est dégénérée dans la direction p. C'est (toujours pour $|p| = 1$) la matrice de la projection orthogonale sur le supplémentaire de la droite vectorielle $\mathbb{R}p$, c'est-à-dire la projection sur le plan tangent à Γ_t. Cette équation est non-linéaire, elliptique dégénérée et singulière : non-linéaire à cause de $A\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$; elliptique car $A(q/|q|) \geq 0$ pour tout q ; dégénérée car $A(p)p = 0$; singulière car l'équation n'a pas de sens quand $\nabla u = 0$.

On remarque que Γ_t est une sous-variété tant que $\nabla u(t, \cdot)$ ne s'annule pas. Pourtant, même en considérant une condition initiale C^∞, il peut arriver qu'à un temps t^* des "singularités" apparaîssent en un point x^* : $\nabla u(t^*, x^*) = 0$. Or, nous allons utiliser la théorie des solutions de viscosité pour résoudre l'équation (6.3) ; ainsi on peut considérer des conditions initiales et des solutions uniformément continues. Autrement dit, cela nous permet de construire un "front généralisé" après l'apparition des singularités.

Le cadre mathématique de notre étude.
Dans la suite de ce chapitre, I_0 est un domaine borné (c'est-à-dire un ouvert connexe borné). On définit la distance signée à Γ_0 par :

$$d_0(x) = \begin{cases} d(x, I_0) & \text{si } x \notin I_0 \\ -d(x, \mathbb{R}^N \setminus I_0) & \text{si } x \in I_0 \end{cases}$$

où $d(x, A) = \inf\{|x - y| : y \in A\}$ est la distance à un ensemble A. Cette fonction est 1-Lipschitz et Γ_0 est bien son ensemble de niveau 0. On peut tronquer d_0 sans changer l'ensemble de niveau 0 pour assurer que u_0 est borné : considérer $u_0(x) = \max(-1, \min(1, d_0(x)))$. Cette fonction est encore 1-Lipschitz.
L'équation à résoudre est de la forme $\partial_t u + F(\nabla u, D^2 u) = 0$ avec $F : \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}_N \to \mathbb{R}, (p, X) \mapsto -\operatorname{tr}\left[A(\nabla u/|\nabla u|)X\right]$ discontinue. On peut vérifier que :

$$\begin{aligned} F_*(p, X) &= -\operatorname{tr} X + \lambda_{\min}(X) = \inf_{|p|=1} F(p, X) \\ F^*(p, X) &= -\operatorname{tr} X + \lambda_{\max}(X) = \sup_{|p|=1} F(p, X) \end{aligned}$$

où $\lambda_{\max}(X)$ et $\lambda_{\min}(X)$ sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre de X. Nous aurons besoin dans la démonstration du principe de comparaison de la propriété suivante : $F_*(0, 0) = F^*(0, 0) = 0$.

6.2 Solutions de viscosité pour les équations d'évolution

A chaque équation $G(D^2 u, \nabla u, u, x) = 0$, on peut associer une équation d'évolution du type :

$$\partial_t u + G(D^2 u, \nabla u, u, x) = 0. \tag{6.4}$$

Si G est elliptique dégénérée (c'est-à-dire vérifie la condition (5.7)), on parle d'équation parabolique dégénérée, ou tout simplement d'équation parabolique.

Pour définir une notion de solution de viscosité pour ces équations, il suffit de considérer que le domaine de résolution a une dimension de plus (on ajoute le temps). En termes de fonctions-test, on obtient une définition équivalente en ne considérant que des φ de classe C^2 en espace et C^1 en temps. En termes de sous-différentiels, cela revient à considérer les *sous- et sur-différentiel paraboliques* des semi-solutions.

Définition 6.1 (Sous-différentiel parabolique) *Soit* $u : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ *une fonction semi-continue inférieurement. Le sous-différentiel parabolique* $\mathcal{P}^- u(t_0, x_0)$ *de* u *en* $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$ *est l'ensemble des triplets* $(\tau, p, X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}_N$ *tels que, pour tout* $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$,

$$u(t,x) \geq u(t_0,x_0) + \tau(t-t_0) + p \cdot (y - x_0) + \frac{1}{2} X(x-x_0) \cdot (x - x_0) + o(|t-t_0| + |x-x_0|^2).$$

On définit le sur-différentiel d'une fonction u scs par $\mathcal{P}^+ u = -\mathcal{P}^-(-u)$. Voici alors la définition des solutions de viscosité pour les équations d'évolution.

Définition 6.2 (Solution de viscosité pour les équations d'évolution) *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$, $G : \mathcal{S}_N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ *localement bornée vérifiant (5.7) et* $u : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$.

i) u est une sous-solution de viscosité *de (6.4) si u est scs et si, pour tout* $(t_0, x_0) \in (0; +\infty) \times \Omega$ *et tout* $(\tau, p, X) \in \mathcal{P}^+ u(t_0, x_0)$, *on a* $\tau + G_*(X, p, u(x_0), x_0) \leq 0$.

ii) u est une sur-solution de viscosité *de (6.4) si u est sci et si, pour tout* $(t_0, x_0) \in (0; +\infty) \times \Omega$ *et tout* $(\tau, p, X) \in \mathcal{P}^- u(t_0, x_0)$, *on a* $\tau + G^*(X, p, u(x_0), x_0) \geq 0$.

iii) u est une solution de viscosité *de (6.4) si elle est une sur- et sous-solution de viscosité de (6.4).*

Dans la démonstration du théorème de comparaison (voir Section 6.4), nous aurons besoin de la version parabolique du lemme d'Ishii. Pour cela, nous devons introduire les sous-différentiels paraboliques limites $\overline{\mathcal{P}}^{\pm}$. Ils se définissent exactement comme les sous-différentiels limites $\overline{D}^{\pm}$. Précisément, $(\tau, p, X) \in \overline{\mathcal{P}}^{\pm} u(t,x)$ s'il existe $(\tau_n, p_n, X_n) \to (\tau, p, X)$ et $x_n \to x$ tels que $(\tau_n, p_n, X_n) \in \mathcal{P}^{\pm} u(t_n, x_n)$ et $u(t_n, x_n) \to u(t,x)$. Nous pouvons maintenant énoncer la version parabolique du Lemme d'Ishii.

Lemme 6.1 (Lemme d'Ishii — Version parabolique) *Soit* U *et* V *des ensembles ouverts de* $\mathbb{R}^N$, $u : \mathbb{R}^+ \times U \to \mathbb{R}$ *scs et* $v : \mathbb{R}^+ \times V \to \mathbb{R}$ *sci. Soit* $\varphi : \mathbb{R}^+ \times U \times V \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2 *en espace et* C^1 *en temps. On suppose que* $(t, x_1, x_2) \mapsto u(t, x_1) - v(t, x_2) - \varphi(t, x_1, x_2)$ *atteint un maximum local en* $(\bar{t}, \bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \mathbb{R}^+ \times U \times V$. *On note* $\tau = \partial_t \varphi(\bar{t}, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$, $p_1 = D_{x_1} \varphi(\bar{t}, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$, $p_2 = -D_{x_2} \varphi(\bar{t}, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$ *et* $A = D^2 \varphi(\bar{t}, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$. *On suppose que* u *et* $-v$ *vérifient l'hypothèse suivante :*

(H) Pour tout (s, z), *il existe* $r > 0$ *tel que pour tout* $M > 0$, *il existe* C *tel que,*

$$\left. \begin{array}{r} |(t,x) - (s,z)| \leq r \\ (\tau, p, X) \in \mathcal{P}^+ w(t,x) \\ |w(t,x)| + |p| + |X| \leq M \end{array} \right\} \Rightarrow \tau \leq C$$

Alors, pour tout $\alpha > 0$ *tel que* $\alpha A < I$, *il existe* τ_1, $\tau_2 \in \mathbb{R}$ *et* X, $Y \in \mathcal{S}_N$ *tels que*

$$\begin{array}{l} \tau = \tau_1 - \tau_2 \\ (\tau_1, p_1, X) \in \overline{\mathcal{P}}^+ u(\bar{t}, \bar{x}_1), \quad (\tau_2, p_2, Y) \in \overline{\mathcal{P}}^- v(\bar{t}, \bar{x}_2), \\ -\dfrac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq (I - \alpha A)^{-1} A. \end{array}$$

Remarque 6.1

1. *L'hypothèse (H) faite dans le lemme est automatiquement vérifiée dès que u est une sous-solution et v est sur-solution d'une équation parabolique.*
2. *Cette version parabolique du lemme d'Ishii permet de ne pas dédoubler la variable en temps. Sa démonstration consiste d'ailleurs à le faire et à passer à la limite. Ceci explique l'hypothèse (H) : elle permet d'avoir la compacité nécessaire.*
3. *Si A vérifie (par blocs)* $A\binom{\xi}{\xi} = 0$ *pour tout* $\xi \in \mathbb{R}^N$, *alors l'inégalité matricielle de la conclusion implique* $X \leq Y$.

6.3 Propriété fondamentale de l'équation géométrique

Théorème 6.1 *Soit $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une sous-solution bornée de l'équation de mouvement par courbure moyenne (6.3). Soit $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante et semi-continue supérieurement. Alors $\theta(u)$ est encore une sous-solution de (6.3).*

Remarque 6.2 – *Posons $F(p, A) = \mathrm{tr}[(I - \frac{p \otimes p}{|p|^2})A]$. On remarque que :*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \forall \mu \in \mathbb{R}, F(\lambda p, \lambda A + \mu p \otimes p) = \lambda F(p, A) \tag{6.5}$$

On dit que l'équation parabolique associée à cette opérateur elliptique est géométrique. *Le théorème 6.1 est encore vrai pour toute équation parabolique associée à un opérateur elliptique dégénéré et géométrique.*
- *On peut énoncer l'analogue de ce théorème pour les sur-solutions v et une θ croissante semi-continue inférieurement.*
- *Le théorème est encore vrai si on supprime l'hypothèse de croissance sur θ, à condition de supposer qu'elle est continue (valable seulement pour le mouvement par courbure moyenne).*

Démonstration du Théorème 6.1 : On commence par supposer que la fonction θ est de classe C^2 et que $\theta' > 0$. En utilisant le fait que F est géométrique (voir (6.5)), il est facile de voir que le résultat découle dans ce cas du lemme suivant :

Lemme 6.2 *Soit $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ et semi-continue supérieurement. Pour tout sur-différentiel parabolique $(\tau, p, A) \in \mathcal{P}^-\theta(u)(t, x)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$, il existe $(\beta, q, B) \in \mathcal{P}^-u(t, x)$ tel que :*

$$\tau = \theta'(u(t, x))\beta, \qquad p = \theta'(u(t, x))q, \qquad A = \theta'(u(t, x))B + \theta''(u(t, x))q \otimes q.$$

Démonstration du lemme : Par définition du sur-différentiel parabolique, pour (s, y) dans un voisinage de (t, x),

$$\begin{aligned} \theta(u)(s, y) \leq \theta(u)(t, x) + \tau(s - t) + \langle p, y - x\rangle + \frac{1}{2}\langle A(y - x), (y - x)\rangle + o(|s - t| + |y - x|^2) \\ \Longrightarrow u(s, y) \leq \theta^{-1}[\theta(u)(t, x) + Q(s, y) + o(|s - t| + |y - x|^2)] \end{aligned}$$

où $Q(s, y) = \tau(s-t) + \langle p, y-x\rangle + \frac{1}{2}\langle A(y-x), (y-x)\rangle$ (on a utilisé le fait que θ est strictement croissante, donc un homéomorphisme d'un voisinage de $u(t, x)$ vers un voisinage de $\theta(u(t, x))$). Puisque θ est de classe C^2 et de dérivée strictement positive, c'est un difféomorphisme local et

$$\theta^{-1}(U + \delta) = \theta^{-1}(U) + (\theta^{-1})'(\theta(U))\delta + \frac{1}{2}(\theta^{-1})''(\theta(U))\delta^2 + o(\delta^2).$$

De plus,

$$(\theta^{-1})'(U) = 1/(\theta'(\theta^{-1}(U))) \qquad (\theta^{-1})''(U) = -\theta''(\theta^{-1}(U))/(\theta'(\theta^{-1}(U)))^3.$$

Donc en appliquant ceci à $U = \theta(u(t, x))$ et $\delta = Q(s, y) + o(|s - t| + |y - x|^2)$, on obtient,

$$\begin{aligned} u(s, y) &\leq \theta^{-1}(\theta(u(t, x)) + Q(s, y) + o(|s - t| + |y - x|^2)) \\ &= u(t, x) + \frac{1}{\theta'(u(t, x))}Q(s, y) - \frac{1}{2}\frac{\theta''(u(t, x))}{(\theta'(u(t, x)))^3}Q^2(s, y) + o(|s - t| + |y - x|^2) \\ &= u(t, x) + \frac{\tau}{\theta'(u(t, x))}(s - t) + \langle\frac{p}{\theta'(u(t, x))}, y - x\rangle + \frac{1}{2\theta'(u(t, x))}\langle A(y - x), y - x\rangle \\ &\quad -\frac{1}{2}\frac{\theta''(u(t, x))}{(\theta'(u(t, x)))^3}(\langle p, y - x\rangle)^2 + o(|s - t| + |y - x|^2). \end{aligned}$$

En utilisant alors le fait que $(\langle p, y - x\rangle)^2 = \langle p \otimes p(y - x), y - x\rangle$, on constate que (β, q, B) défini dans le lemme est bien dans le sur-différentiel parabolique de u en (t, x). ∎

Si la fonction θ n'est que semi-continue supérieurement, supposons qu'on puisse l'approcher par des fonctions θ^ε de classe C^2 vérifiant $(\theta^\varepsilon)' > 0$ et telles que $\theta^\varepsilon \geq \theta$ et $\lim_{\varepsilon,\eta\to 0} \sup_{\bar{\varepsilon}\leq\varepsilon} \theta^{\bar{\varepsilon}}(r + \eta) = \theta(r)$ (par croissance de θ^ε, cela revient à demander que $\limsup^* \theta^\varepsilon = \theta$). Par ce qui précède, $\theta^\varepsilon(u)$ est une sous-solution de (6.3) et le théorème de stabilité discontinue (théorème 5.1, p. 57 (*)) nous montre que $\limsup^*(\theta^\varepsilon(u))$ est encore une sous-solution de (6.3) ; or, par croissance de θ^ε,

$$\limsup^*(\theta^\varepsilon(u))(t,x) = \lim_{\varepsilon,\mu\to 0} \sup_{\substack{\overline{\varepsilon}\le\varepsilon \\ |s-t|+|y-x|\le\mu}} \theta^{\overline{\varepsilon}}(u(s,y)) = \lim_{\varepsilon,\mu\to 0} \sup_{\overline{\varepsilon}\le\varepsilon} \theta^{\overline{\varepsilon}}\left(\sup_{|s-t|+|y-x|\le\mu} u(s,y)\right).$$

Le caractère scs de u assure que $\sup_{|s-t|+|y-x|\le\mu} u(s,y) \le u(t,x)+\omega(\mu)$ avec $\omega(\mu)\to 0$ lorsque $\mu\to 0$, et donc, toujours par croissance de θ^ε,

$$\limsup^*(\theta^\varepsilon(u))(t,x) \le \lim_{\varepsilon,\mu\to 0} \sup_{\overline{\varepsilon}\le\varepsilon} \theta^{\overline{\varepsilon}}(u(t,x)+\omega(\mu)) = \theta(u(t,x))$$

par choix des approximations θ^ε et une composition de limites. D'un autre côté, comme $\theta^{\overline{\varepsilon}} \ge \theta$, on a aussi

$$\limsup^*(\theta^\varepsilon(u))(t,x) = \lim_{\varepsilon,\mu\to 0} \sup_{\overline{\varepsilon}\le\varepsilon} \theta^{\overline{\varepsilon}}\left(\sup_{|s-t|+|y-x|\le\mu} u(s,y)\right) \ge \lim_{\mu\to 0} \theta\left(\sup_{|s-t|+|y-x|\le\mu} u(s,y)\right) \ge \theta(u(t,x))$$

(la dernière inégalité vient du fait que θ est croissante). Ainsi, $\limsup^*(\theta^\varepsilon(u)) = \theta(u)$ et la preuve est complète, à condition que nous prouvions l'existence de θ^ε.
Voici une manière de construire de telles approximations : on se donne un noyau régularisant ρ_ε dont le support est décentré sur $\mathbb{R}^-$ (i.e. $\mathrm{supp}(\rho_\varepsilon)\subset[-\varepsilon,0]$ par exemple) et on pose $\Theta^\varepsilon = \theta * \rho_\varepsilon$ (remarquons que, puisque θ est croissante, elle est localement bornée et cette convolution a donc un sens). Puisque θ est croissante, Θ^ε est croissante régulière et, par décentrement du noyau,

$$\Theta^\varepsilon(r) = \int_{-\varepsilon}^0 \theta(r-s)\rho_\varepsilon(s)\,ds \ge \theta(r)\int_{-\varepsilon}^0 \rho_\varepsilon(s)\,ds = \theta(r).$$

En combinant $\Theta^{\overline{\varepsilon}} \ge \theta$ et la croissance de θ, on a

$$\Theta^{\overline{\varepsilon}}(r+\eta) \ge \theta(r+\eta) \ge \theta(r).$$

De plus, toujours par croissance de θ,

$$\Theta^{\overline{\varepsilon}}(r+\eta) = \int_{-\overline{\varepsilon}}^0 \theta(r+\eta-s)\rho_{\overline{\varepsilon}}(s)\,ds \le \theta(r+\eta+\overline{\varepsilon})\int_{-\overline{\varepsilon}}^0 \rho_{\overline{\varepsilon}}(s)\,ds = \theta(r+\eta+\overline{\varepsilon}).$$

Mais θ est scs, donc $\lim_{\varepsilon,\eta\to 0}\sup_{\overline{\varepsilon}\le\varepsilon}\theta(r+\eta+\overline{\varepsilon}) \le \theta(r)$ et $\lim_{\varepsilon,\eta\to 0}\sup_{\overline{\varepsilon}\le\varepsilon}\Theta^{\overline{\varepsilon}}(r+\eta) \le \theta(r)$. On en déduit que $\lim_{\varepsilon,\eta\to 0}\sup_{\overline{\varepsilon}\le\varepsilon}\Theta^{\overline{\varepsilon}}(r+\eta) = \theta(r)$ et pour s'assurer que les dérivées des approximations restent strictement positives, puisque Θ^ε est croissante, il suffit de poser $\theta^\varepsilon(r) = \Theta^\varepsilon(r)+\varepsilon r$. ■

6.4 Un résultat de comparaison pour le mouvement par courbure moyenne

Théorème 6.2 *Soit $u_0:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ une fonction scs bornée et $v_0:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ une fonction sci bornée. Soit u une sous-solution bornée de (6.3) telle que $u(0,x)\le u_0(x)$ et v une sur-solution bornée de (6.3) telle que $v(0,x)\ge v_0(x)$. Supposons que u_0 (ou v_0) est uniformément continue. Si $u_0\le v_0$ alors $u\le v$ sur $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^N$.*

Démonstration : On procède comme expliqué dans la section 5.5. Pour un temps fixé $T>0$, on pose,

$$M = \sup\{u(t,x)-v(t,x) : (t,x)\in[0,T[\times\mathbb{R}^N\}$$

et l'on veut montrer que $M\le 0$. Remarquons que ce supremum est fini car les deux fonctions mises en jeu sont bornées. On suppose par l'absurde que $M>0$ et on exhibe une contradiction. Si $M>0$, il existe

*. A noter que les équations paraboliques sont un cas particulier acceptable d'hamiltonien dans ce théorème de stabilité : elles correspondent à des hamiltoniens en dimension $N+1$, indépendants de la dérivée seconde temporelle.

$(t^*,x^*) \in [0,T[\times\mathbb{R}^N$ tels que $u(t^*,x^*) - v(t^*,x^*) > 0$. On dédouble alors les variables en considérant, pour des constantes $\varepsilon, \alpha, \gamma > 0$,

$$\overline{M} = \sup\left\{u(t,x) - v(t,y) - \frac{|x-y|^4}{4\varepsilon} - \frac{\alpha}{2}(|x|^2 + |y|^2) - \frac{\gamma}{T-t} : (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^N\right\}.$$

On remarque que $\overline{M} \geq u(t^*,x^*) - v(t^*,x^*) - \alpha|x^*|^2 - \frac{\gamma}{T-t^*}$ et donc $\overline{M} > 0$ pour α et γ suffisamment petits. La constante γ est désormais fixée. Grâce au terme $\alpha/2(|x|^2 + |y|^2)$, ce supremum est bien atteint ; notons $(\overline{t}, \overline{x}, \overline{y})$ un maximiseur. De $\overline{M} > 0$ et du fait que u et v sont bornés, on déduit :

$$|\overline{x} - \overline{y}|^4 \leq C\varepsilon \qquad \alpha|\overline{x}|^2 + \alpha|\overline{y}|^2 \leq C \qquad \gamma \leq C(T - \overline{t})$$

où C ne dépend que de u et v. Ainsi $(\alpha\overline{x}, \alpha\overline{y}) \to 0$ lorsque $\alpha \to 0$ et $\overline{t} \leq T - \gamma/C$. On distingue alors deux cas.

Premier cas. Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha \in (0,\varepsilon)$ tel que $\overline{t} = 0$. Alors il existe des suites $\varepsilon_n \to 0$ et $\alpha_n \to 0$ telles que $\overline{t}_n = 0$ et

$$0 < \overline{M} \leq u(0,\overline{x}_n) - v(0,\overline{y}_n) \leq u_0(\overline{x}_n) - u_0(\overline{y}_n) \leq w(|\overline{x}_n - \overline{y}_n|)$$

avec w le module de continuité de u_0 (si c'est v_0 qui est uniformément continue, remplacer u_0 par v_0 dans ce qui précède). On obtient alors la contradiction souhaitée puisque $|\overline{x}_n - \overline{y}_n| \to 0$.

Second cas. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\alpha \in (0,\varepsilon)$ on a $\overline{t} > 0$. La constante ε est désormais fixée. On pose $\tilde{u}(t,x) = u(t,x) - \frac{\alpha}{2}|x|^2$ et $\tilde{v}(t,x) = v(t,x) + \frac{\alpha}{2}|x|^2$; on a

$$\overline{M} = \sup\left\{\tilde{u}(t,x) - \tilde{v}(t,x) - \frac{|x-y|^4}{4\varepsilon} - \frac{\gamma}{T-t} : (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^N\right\}.$$

On considère alors la fonction-test $\psi(t,x,y) = \frac{|x-y|^4}{4\varepsilon} + \frac{\gamma}{T-t} = \frac{\phi(x,y)^2}{\varepsilon} + \frac{\gamma}{T-t}$ où $\phi(x,y) = |x-y|^2/2$. On veut appliquer le lemme d'Ishii parabolique à cette fonction-test ; il faut donc calculer ses dérivées. Si on pose $p = x - y$, on trouve :

$$\begin{aligned}
&\partial_t\psi(t,x,y) = \frac{\gamma}{(T-t)^2} \\
&\nabla_x\psi = \frac{2}{\varepsilon}\phi\nabla_x\phi = \frac{1}{\varepsilon}|p|^2 p\,, \qquad \nabla_y\psi = \frac{2}{\varepsilon}\phi\nabla_y\phi = -\frac{2}{\varepsilon}\phi\nabla_x\phi = -\frac{1}{\varepsilon}|p|^2 p \\
&D^2\psi = \frac{2}{\varepsilon}D(\phi D\phi) = \frac{2}{\varepsilon}(D\phi \otimes D\phi + \phi D^2\phi) = \frac{2}{\varepsilon}\left(\begin{pmatrix} p \\ -p \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p \\ -p \end{pmatrix} + \frac{|p|^2}{2}\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

En posant $\overline{p} = \overline{x} - \overline{y}$, il vient $D^2\psi(\overline{t},\overline{x},\overline{y}) = A = \frac{2|\overline{p}|^2}{\varepsilon}\begin{pmatrix} Z & -Z \\ -Z & Z \end{pmatrix}$ où $Z = \frac{I}{2} + \frac{\overline{p}}{|\overline{p}|} \otimes \frac{\overline{p}}{|\overline{p}|}$. On applique alors le lemme d'Ishii en utilisant $1/(2\|A\|)A < I$. On vérifie que $\|A\| \leq 6|\overline{p}|^2/\varepsilon$ et que si $\delta = 1/(2\|A\|)$, $(I - \delta A)^{-1}A \leq 2\|A\|I \leq 12|\overline{p}|^2/\varepsilon I$. Il existe donc deux matrices $X, Y \in \mathcal{S}_N$ et deux réels τ_1, τ_2 tels que

$$\begin{aligned}
&\tau_1 - \tau_2 = \frac{\gamma}{(T-\overline{t})^2} \\
&(\tau_1, \frac{|\overline{p}|^2\overline{p}}{\varepsilon}, X) \in \overline{\mathcal{P}}^+\tilde{u}(\overline{t},\overline{x})\,, \qquad (\tau_2, \frac{|\overline{p}|^2\overline{p}}{\varepsilon}, Y) \in \overline{\mathcal{P}}^-\tilde{v}(\overline{t},\overline{y}), \\
&-\frac{6|\overline{p}|^2}{\varepsilon}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq \frac{6|\overline{p}|^2}{\varepsilon}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi X et Y sont bornées indépendamment de α (rappelons que c'est déjà le cas pour $\overline{p}$). En particulier, $-(12|\overline{p}|^2/\varepsilon)I \leq X \leq (12|\overline{p}|^2/\varepsilon)I$. Il existe donc $\alpha_n \to 0$ telle que $\overline{t} \to t_\infty$, $\overline{p} \to p_\infty$ et $(X,Y) \to (X_\infty, Y_\infty)$. Par ailleurs, etant donné que u est sous-solution et que v est sur-solution, en utilisant l'ellipticité de l'équation (remarquons que $A\binom{\xi}{\xi} = 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ de sorte que, par le troisième point de la remarque 6.1, on a $X \leq Y$) on trouve

$$\begin{aligned}
&\tau_1 + F_*\left(\frac{|\overline{p}|^2\overline{p}}{\varepsilon} + \alpha\overline{x}, X + \alpha I\right) \leq 0 \\
&\tau_2 + F^*\left(\frac{|\overline{p}|^2\overline{p}}{\varepsilon} - \alpha\overline{y}, X - \alpha I\right) \geq 0
\end{aligned}$$

En soustrayant ces inégalités et laissant $n \to \infty$, on trouve,

$$\frac{\gamma}{(T-t_\infty)^2} + F_*\left(\frac{|p_\infty|^2 p_\infty}{\varepsilon}, X_\infty\right) \le F^*\left(\frac{|p_\infty|^2 p_\infty}{\varepsilon}, X_\infty\right)$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que si $p_\infty = 0$ alors $X_\infty = 0$ (on rappelle que $F_*(0,0) = F^*(0,0) = 0$). Si $p_\infty \neq 0$, alors la continuité de F en (p_∞, X_∞) donne la contradiction recherchée. ■

6.5 Existence d'une solution pour le mouvement par courbure moyenne

Nous construisons maintenant une solution à (6.3) par la méthode de Perron. *Grosso modo*, cette dernière consiste à considérer la plus grande sous-solution vérifiant la condition initiale et à montrer qu'elle est également sur-solution. Pour appliquer ce programme, le principe de comparaison et les résultats de stabilité sont importants. Nous venons de prouver l'unicité forte ; pour ce qui est de la stabilité, remarquer que le cas parabolique n'est qu'un cas particulier du cas stationnaire. Les résultats de la section 5.4 sont donc valables avec $\Omega =]0, +\infty[\times \mathbb{R}^N$ (voir en particulier les commentaires de Â§5.4.3).

Théorème 6.3 *Soit $u_0 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction bornée uniformément continue. Alors il existe une unique solution $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ bornée et uniformément continue de (6.3).*

Démonstration. : L'unicité de u est une conséquence du théorème de comparaison 6.2. Pour montrer l'existence, nous allons utiliser la méthode de Perron. Pour cela, nous allons commencer par construire des "fonctions barrières" qui nous assureront que la condition initiale est bien vérifiée.
Considérons le module de continuité de u_0 : $\omega_0(r) = \sup_{x\in\mathbb{R}^N,\ |h|\le r} |u_0(x+h) - u_0(x)|$.

Lemme 6.3 *Il existe u^- (resp. u^+) sous-solution (resp. sur-solution) de (6.3) telle que et*

$$u_0(x) - \omega_0(\sqrt{2(N-1)t}) \le u^-(t,x) \le u^+(t,x) \le u_0(x) + \omega_0(\sqrt{2(N-1)t}).$$

pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N$. En particulier $(u^-)_*(0,x) = u^-(0,x) = u_0(x) = u^+(0,x) = (u^+)_*(0,x)$.

Démonstration du lemme 6.3 : On remarque que la fonction $(t,x) \mapsto -(|x|^2 + 2(N-1)t)$ est solution classique de (6.3). Il faut alors modifier cette fonction pour assurer que la condition initiale est satisfaite. Pour ce faire, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, on définit pour $r \le 0$,

$$\theta_\xi(r) = \inf\{u_0(y) : |y-\xi|^2 + r \le 0\}$$

et on la prolonge à $\mathbb{R}^+$ par $u_0(\xi)$.
On peut vérifier que θ_ξ est croissante, bornée (indépendamment de ξ), continue, $\theta_\xi(0) = u_0(\xi)$ et pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N$, $\theta_\xi(-|x-\xi|^2 - 2(N-1)t) \le u_0(x)$. De plus, en utilisant la propriété fondamentale de l'équation géométrique (théorème 6.1), on sait que $\theta_\xi(-|x-\xi|^2 - 2(N-1)t)$ est une sous-solution de (6.3). On pose alors :

$$u^-(t,x) = \left(\sup_\xi \theta_\xi(-|x-\xi|^2 - 2(N-1)t)\right)^*$$

et par le théorème 5.2, on sait que ceci est encore une sous-solution de (6.3). Ensuite on remarque que $(u^-)_*(0,x) \le u^-(0,x) \le u_0(x)$. De plus,

$$u^-(t,x) \ge \theta_x(-2(N-1)t) \ge u_0(x) - \omega_0(\sqrt{2(N-1)t})$$

donc $u^-(0,x) \ge (u^-)_*(0,x) \ge u_0(x)$ et $u^-(0,x) = u_0(x)$. On définit de la même manière un u^+ et, pour justifier que $u^- \le u^+$, on utilise le théorème de comparaison 6.2. ■
Considérons alors l'ensemble de toutes les sous-solutions majorées par u^+ (u^- en est une). La méthode de Perron consiste à considérer le supremum de cette famille de sous-solutions ; elle sera encore sous-solution. On montre alors que c'est aussi une sur-solution et que la condition initiale est satisfaite. Considérons donc :

$$\mathcal{S} = \{w : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \text{ sous-solution de } (6.3), w \le u^+\} \ni u^-.$$

et posons :

$$u = (\sup\{w : w \in \mathcal{S}\})^* .$$

Par le théorème 5.2, on sait que u est une sous-solution de (6.3). Du fait que $u^-(0,x) = (u^+)^*(0,x) = u_0(x)$, on sait que $u(0,x) = u_0(x)$. Considérons alors $u_* : u_*(0,x) \geq (u^-)_*(0,x) = u_0(x)$. Si on montre que c'est une sur-solution de l'équation géométrique, par comparaison, on en déduit que $u^* \leq u_*$ et donc que u est continue, est solution de (6.3) et vérifie la condition initiale.

L'argument qui suit est général, il n'est pas spécifique à l'équation que l'on étudie. Supposons que u_* ne soit pas sur-solution de (6.3). L'idée est de construire une sous-solution qui contredise la maximalité de u. Dire que u_* n'est pas sur-solution implique qu'il existe $(t,x) \in (0;+\infty) \times \mathbb{R}^N$ et $(\tau, p, X) \in \mathcal{P}^- u_*(t,x)$ tels que $\tau + F^*(p,X) = -\theta < 0$.

Posons alors

$$Q(s,y) = u_*(t,x) + \tau(s-t) + \langle p, y-x\rangle + \frac{1}{2}\langle X(y-x), y-x\rangle + \delta - \gamma\left(\frac{1}{2}|y-x|^2 + |s-t|\right)$$

où δ et γ sont deux constantes que l'on ajustera plus tard. Calculons ensuite

$$\begin{aligned} \partial_s Q(s,y) + F_*(\nabla Q, D^2 Q)(s,y) &= \tau - \gamma\frac{s-t}{|s-t|} + F_*(p + X(y-x) - \gamma(y-x), X - \gamma I) \\ &\leq \tau - \gamma\frac{s-t}{|s-t|} + F^*(p + X(y-x) - \gamma(y-x), X - \gamma I) \end{aligned}$$

(si $s = t$, il faut remplacer $\frac{s-t}{|s-t|}$ par n'importe quel réel compris entre -1 et 1). Donc pour r et γ assez petits, on a :

$$\partial_s Q + F_*(\nabla Q, D^2 Q) \leq -\theta/2 < 0$$

pour tout $(s,y) \in \mathcal{V}_r = \{(a,z) : |z-x|^2/2 + |a-t| < r\}$ (on a utilisé le caractère scs de F^*). De plus, par définition du sous-différentiel parabolique :

$$\begin{aligned} u(s,y) &\geq u_*(s,y) \geq u_*(t,x) + \tau(s-t) + \langle p, y-x\rangle + \frac{1}{2}\langle X(y-x), y-x\rangle + o(|y-x|^2 + |s-t|) \\ &\geq Q(s,y) - \delta + \gamma\left(\frac{1}{2}|y-x|^2 + |s-t|\right) + o(|y-x|^2 + |s-t|) \end{aligned}$$

Choisissons $\delta = \frac{r}{4}\gamma$ et considérons $(s,y) \in \mathcal{V}_r \setminus \mathcal{V}_{r/2}$:

$$u(s,y) \geq Q(s,y) - \frac{\gamma r}{4} + \frac{\gamma r}{2} + o(r) = Q(s,y) + \frac{\gamma r}{4} + o(r)$$

Donc pour r suffisamment petit, $u(s,y) - Q(s,y) \geq \gamma r/8 > 0$ sur $\mathcal{V}_r \setminus \mathcal{V}_{r/2}$. Posons alors :

$$U(s,y) = \begin{cases} \max\{u(s,y), Q(s,y)\} & \text{si } (s,y) \in \mathcal{V}_r, \\ u(s,y) & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction U est encore sous-solution de (6.3) et $U(0,x) = u(0,x) = u_0(x)$. Donc par comparaison $U \leq u^+$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N$. Donc $U \in \mathcal{S}$.

De plus, $\sup_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N}\{U(t,x) - u(t,x)\} \geq \delta$; en effet, en prenant $(t_n, x_n) \to (t,x)$ tel que $u(t_n,x_n) \to u_*(t,x)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} U(t_n,x_n) - u(t_n,x_n) \geq \lim_{n\to\infty} Q(t_n,x_n) - u(t_n,x_n) = \delta > 0.$$

Ceci contredit la définition de u.

Il nous reste à montrer que u est uniformément continue. Montrons d'abord que u est uniformément continue en espace. Pour tout $h \in \mathbb{R}^N$, $u_h^{\pm}(t,x) = u(t,x+h) \pm \omega_0(|h|)$ est solution de (6.3) et $u_h^-(0,x) \leq u_0(x) \leq u_h^+(0,x)$. Par le théorème de comparaison, on en déduit que $u(t,x+h) - \omega_0(|h|) \leq u(t,x) \leq u(t,x+h) + \omega_0(|h|)$.

Pour montrer que u est uniformément continue en temps, on fixe $\delta \in \mathbb{R}$. En considèrant $u_\delta^+(t,x) = u(t+\delta,x)$ et en raisonnant comme précédemment, on montre que :

$$|u(t+\delta,x) - u(t,x)| \leq \sup_x |u(\delta,x) - u_0(x)| \leq \omega_0(\sqrt{2(N-1)\delta}).$$

La seconde inégalité est une conséquence du lemme 6.3. Ceci achève la démonstration. ■

Exercice 6.1 *Montrer que le théorème 6.3 est encore vrai pour une condition initiale non nécessairement bornée (la solution n'est alors plus bornée). On pourra utiliser des fonctions de troncature (croissante) et le théorème de Ascoli-Arzélà.*

6.6 Cohérence de la définition

Théorème 6.4 *Soit u_0 et v_0 deux fonctions bornées uniformément continues telles que :*

$$\exists R > 0, \quad \forall x \notin B(0,R), \qquad u_0(x) = v_0(x) = 1 \tag{6.6}$$

et

$$\{u_0(x) < 0\} = \{v_0(x) < 0\} \qquad \& \qquad \{u_0(x) > 0\} = \{v_0(x) > 0\}.$$

Alors les deux solutions u et v de (6.3) respectivement associées aux conditions initiales u_0 et v_0 vérifient :

$$\{u(t,x) < 0\} = \{v(t,x) < 0\} \qquad \& \qquad \{u(t,x) > 0\} = \{v(t,x) > 0\}.$$

En particulier, les fronts définis par u et v coïncident.

Remarque 6.1 *L'hypothèse (6.6) traduit le fait que le front initial est borné. On peut traiter le cas général mais il faut alors faire de nouvelles approximations.*

Démonstration : Posons $m = \min u_0 < 0$ et $M = \max u_0 > 0$. Définissons deux fonctions ϕ et ψ par

$$\phi(r) = \begin{cases} \inf\{v_0(y) : u_0(y) \geq r\} & \text{si } r \leq M \\ \phi(M) & \text{si } r > M \end{cases} \qquad \psi(r) = \begin{cases} \sup\{v_0(y) : u_0(y) \leq r\} & \text{si } r \geq m \\ \psi(m) & \text{si } r < m \end{cases}$$

Lemme 6.4 *1. Les deux fonctions ϕ et ψ sont croissantes, ϕ est sci, ψ est scs.*

2. $(r \leq 0 \Leftrightarrow \phi(r) \leq 0)$ et $(r \geq 0 \Leftrightarrow \psi(r) \geq 0)$.

Admettons ce lemme. Par construction, on a $\phi(u_0) \leq v_0 \leq \psi(u_0)$. On régularise alors ϕ par en dessous et ψ par en dessus, en préservant la monotonie : ainsi, on considère deux fonctions croissantes et C^1 telles que $\phi_\varepsilon \leq \phi$ et $\psi^\varepsilon \geq \psi$. Alors par la propriété fondamentale des équations géométriques, $\phi_\varepsilon(u)$ est une sous-solution de (6.3), $\psi^\varepsilon(u)$ est une sur-solution. Donc par le théorème de comparaison, $\phi_\varepsilon(u) \leq v \leq \psi^\varepsilon(u)$. Après passage à la limite, on récupère

$$\phi(u) \leq v \leq \psi(u).$$

Fixons $t > 0$. Soit x tel que $v(t,x) \geq 0$. Alors $\psi(u(t,x)) \geq 0$ donc (grâce au lemme 6.4) $u(t,x) \geq 0$. Ainsi $\{x : v(t,x) \geq 0\} \subset \{x : u(t,x) \geq 0\}$. Soit x tel que $v(t,x) \leq 0$. Alors $\phi(u(t,x)) \leq 0$ donc (grâce au lemme 6.4) $u(t,x) \leq 0$. Ainsi $\{x : v(t,x) \leq 0\} \subset \{x : u(t,x) \leq 0\}$. Donc $\{x : v(t,x) = 0\} \subset \{x : u(t,x) = 0\}$. En inversant les rôles de u et v, on conclut que $\{x : v(t,x) = 0\} = \{x : u(t,x) = 0\}$.
Puis $\{x : v(t,x) < 0\} \subset \{x : u(t,x) < 0\} \cup \{x : u(t,x) = 0\} = \{x : u(t,x) < 0\} \cup \{x : v(t,x) = 0\}$ donc $\{x : v(t,x) < 0\} \subset \{x : u(t,x) < 0\}$. En inversant une fois encore les rôles de u et v, on en déduit $\{x : v(t,x) < 0\} = \{x : u(t,x) < 0\}$. Ceci achève la démonstration. ∎
Démonstration du lemme 6.4 : Il est facile de voir que les fonctions sont croissantes et qu'elles sont semi-continues. On peut aussi vérifier que $\phi(0) = \psi(0) = 0$. La croissance implique que si $r \leq 0$ alors $\phi(r) \leq 0$. Réciproquement, si $\phi(r) \leq 0$, alors il existe une suite $\{y_n\}_{n \geq 1}$ telle que pour tout n, $v_0(y_n) \leq 1/n$ et $u_0(y_n) \geq r$. Comme l'ensemble $\{x : v_0(x) \leq 1/2\}$ est borné, on peut extraire une sous-suite qui converge vers y_∞. Alors $v_0(y_\infty) \leq 0$ et $u_0(y_\infty) \geq r$. Or $\{x : v_0(x) \leq 0\} = \{x : u_0(x) \leq 0\}$ donc $r \leq u_0(u_\infty) \leq 0$. ∎

6.7 Commentaires et bibliographie

L'approche par ensembles de niveau pour le mouvement par courbure moyenne a été introduite en 1991 simultanément par Evans et Spruck [19] et Chen, Giga et Goto [16]. Ces résultats ont des applications très diverses : théorie de l'image, problème de combustion, mathématique financière *etc.* Tous les résultats que nous présentons ici sont tirés de ces deux articles. Seule la démonstration de la cohérence de la définition (Théorème 6.4) est tirée de [24].
La théorie de la propagation de fronts pour des lois géométriques plus générales a ensuite été développée. On pourra consulter à ce sujet l'article de synthèse de Souganidis [25] et les références qu'il cite.

Chapitre 7

Annexes

7.1 Lemmes techniques pour les solutions de viscosité

Lemme 7.1 *Soit $A \in \mathcal{S}_N$. On a $\mathrm{tr}(AZ) \geq 0$ pour tout Z symétrique positive si et seulement si A est positive.*

Démonstration du lemme 7.1 :
On se place dans une base orthonormale de diagonalisation de A et on note λ_i les valeurs propres de A. Soit Z une matrice de coefficients $((z_{i,j}))_{i,j}$: on a $\mathrm{tr}(AZ) = \sum_i \lambda_i z_{i,i}$.
Supposons que $\mathrm{tr}(AZ)$ soit positive pour tout Z dans $\mathcal{S}_N$, et prenons la matrice Z qui a des 0 partout sauf un 1 sur la diagonale en i-ème position (Z est bien diagonale positive - on notera que l'on a pris soin de diagonaliser A dans une base orthonormée de sorte que la symétrie de Z dans cette base corresponde bien à la symétrie pour le produit scalaire usuel). Alors $\mathrm{tr}(AZ) = \lambda_i$ est positif ; ceci étant vrai pour tout i, cela prouve la positivité de A.
Supposons maintenant que A est positive : tous les λ_i ($i = 1, \ldots, N$) sont donc positifs. Si Z est symétrique positive alors, en notant e_i le i-ème vecteur de la base de diagonalisation de A, on a $z_{i,i} = \langle Ze_i, e_i\rangle \geq 0$. Ceci étant vrai pour tout i, cela montre que $\mathrm{tr}(AZ) = \sum_i \lambda_i z_{i,i}$ est positif. ■

Lemme 7.2 *Si $F : \mathcal{S}_N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ est continue et vérifie (5.25), alors elle vérifie (5.7). Si F est indépendant de x, alors ces deux hypothèses sont équivalentes.*

Démonstration du lemme 7.2 :
Soit $X \leq Y$ des matrices symétriques. Cherchons à voir comment modifier X en $\tilde{X}$ de telle sorte que $(\tilde{X}, Y)$ vérifie la majoration dans les inégalités matricielles de (5.25) ; pour cela, on utilise la forme donnée en remarque 5.6-i) de cette inégalité : si $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\begin{aligned}
\langle X\xi, \xi\rangle &= \langle X(\xi - \eta + \eta), \xi - \eta + \eta\rangle \\
&= \langle X(\xi - \eta), \xi - \eta\rangle + \langle 2X(\xi - \eta), \eta\rangle + \langle X\eta, \eta\rangle \\
&\leq \langle Y\eta, \eta\rangle + ||X||\, |\xi - \eta|^2 + 2||X||\, |\xi - \eta|\, |\eta|.
\end{aligned}$$

Nous allons chercher $\tilde{X}$ sous la forme $X - c(\lambda)I$ et choisir $c(\lambda)$ de telle sorte que soit "compensé" le "mauvais terme" $2\|X\||\xi - \eta||\eta|$. Soit $\lambda > 2||X||$. Il faut trouver $c(\lambda) \geq 0$ de sorte que

$$\langle (X - c(\lambda)I)\xi, \xi\rangle \leq \langle Y\eta, \eta\rangle + ||X||\, |\xi - \eta|^2 + \lambda|\xi - \eta|^2.$$

Vu les calculs précédents, il suffit de trouver $c(\lambda)$ tel que

$$2||X||\, |\xi - \eta|\, |\eta| - c(\lambda)|\xi|^2 \leq \lambda|\xi - \eta|^2,$$

soit encore

$$2||X||\, |\xi - \eta|\, |\eta| - \lambda|\xi - \eta|^2 \leq c(\lambda)|\xi|^2.$$

Comme on cherche $c(\lambda)$ positif, il suffit d'établir cette inégalité uniquement lorsque le membre de gauche est positif, c'est-à-dire lorsque $2||X||\,|\eta| \geq \lambda|\xi-\eta|$, ce qui implique en particulier $2||X||\,|\eta| \geq \lambda|\eta| - \lambda|\xi|$, donc $|\eta| \leq \frac{\lambda}{\lambda-2||X||}|\xi|$. Dans cette situation, on en déduit $|\xi-\eta| \leq \frac{2||X||}{\lambda}|\eta| \leq \frac{2||X||}{\lambda-2||X||}|\xi|$ et donc

$$2||X||\,|\xi-\eta|\,|\eta| - \lambda|\xi-\eta|^2 \leq 2||X||\frac{2||X||}{\lambda-2||X||}|\xi|\frac{\lambda}{\lambda-2||X||}|\xi| = \frac{4||X||^2\lambda}{(\lambda-2||X||)^2}|\xi|^2$$

et on constate que $c(\lambda) = \frac{4||X||^2\lambda}{(\lambda-2||X||)^2}$, qui tend vers 0 lorsque $\lambda \to \infty$, convient.
On a donc, pour tout $\lambda > 2||X||$ et avec le $c(\lambda)$ ci-dessus,

$$\langle (X - c(\lambda)I)\xi, \xi\rangle \leq \langle Y\eta, \eta\rangle + (||X|| + \lambda)\,|\xi-\eta|^2.$$

Si on prend $\varepsilon > 0$ tel que $||Y|| \leq \frac{3}{\varepsilon}$, $||X - c(\lambda)I|| \leq \frac{3}{\varepsilon}$ et $||X|| + \lambda \leq \frac{3}{\varepsilon}$, les matrices $X - c(\lambda)$ et Y vérifient l'inégalité matricielle de (5.25). En prenant $(p, x) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ et en posant $y = x - \varepsilon p$ (de sorte que $\frac{x-y}{\varepsilon} = p$), on trouve donc

$$F(Y, p, u, x - \varepsilon p) \leq F(X - c(\lambda)I, p, u, x) + \omega(\varepsilon|p|^2 + \varepsilon|p|).$$

On peut alors envoyer successivement ε vers 0 (la seule condition sur ce nombre est qu'il soit assez petit par rapport à λ), puis λ vers l'infini (ici aussi, on avait juste besoin de $\lambda > 2||X||$), en rappelant qu'alors $c(\lambda) \to 0$, pour voir que $F(Y, p, u, x) \leq F(X, p, u, x)$, grâce à la continuité de F.

Lorsque F ne dépend pas de x, voir que (5.7) implique (5.25) est assez simple : en effet, si X et Y vérifient, pour un $\varepsilon > 0$, l'inégalité matricielle de (5.25) alors on a $X \leq Y$ (voir remarque 5.6). Si $(x, y) \in \mathbb{R}^N$ alors, en appliquant l'ellipticité de F avec $p = \frac{x-y}{\varepsilon}$, on trouve $F(Y, \frac{x-y}{\varepsilon}, u) \leq F(X, \frac{x-y}{\varepsilon}, u)$, ce qui prouve que F vérifie (5.25) avec $\omega \equiv 0$. ■

7.2 Le calcul sous-différentiel d'ordre 2

7.2.1 Définitions des sous-différentiels

Nous rappelons la définition des sous-différentiels d'ordre 2, parfois appelés sous-différentiels de Fréchet.

Définition 7.1 (Sous-différentiel d'ordre 2) *Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ sci. Le sous-différentiel $D^{2,-}u(x_0)$ d'ordre 2 de u en $x_0 \in \Omega$ est l'ensemble des couples $(p, X) \in \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}_N$ tels que, pour tout $x \in \Omega$,*

$$u(x) \geq u(x_0) + \langle p, x - x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle X(x - x_0), x - x_0\rangle + o(|x - x_0|^2).$$

Voici différentes caractérisations des sous-différentiels d'ordre 2.

Proposition 7.1 (Caractérisation des sous-différentiels d'ordre 2) *Les énoncés suivants sont équivalents.*
i) $(p, X) \in D^{2,-}u(x_0)$
ii) Il existe une fonction φ de classe C^2 telle que $u - \varphi$ atteint un minimum local en x_0 et $(p, X) = (D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0))$.
iii) Il existe une fonction φ de classe C^2 telle que $u - \varphi$ atteint un minimum local strict en x_0 et $(p, X) = (D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0))$.
iv) Il existe une fonction φ de classe C^2 telle que $u - \varphi$ atteint un minimum global en x_0 et $(p, X) = (D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0))$.
v) Il existe une fonction φ de classe C^2 telle que $u - \varphi$ atteint un minimum global strict en x_0 et $(p, X) = (D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0))$.

DÉMONSTRATION : Démontrons d'abord que *(i)* est équivalent à *(ii)*.
Soit $\varphi \in C^2(\Omega)$ telle que $u - \varphi$ a un minimum local en x_0. Quitte à ajouter une constante à φ (ce qui ne change pas ses dérivées), on peut toujours supposer que ce minimum vaut 0. On écrit alors simplement, par Taylor, au voisinage de x_0, $u(x) \geq \varphi(x) = \varphi(x_0) + \langle \nabla\varphi(x_0), x - x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2\varphi(x_0)(x - x_0), x - x_0\rangle + o(|x - x_0|^2)$.
Soit maintenant $(p, X) \in D^{2,-}u(x_0)$. On a

$$u(x) \geq u(x_0) + \langle p, x - x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle X(x - x_0), x - x_0\rangle + |x - x_0|^2\varepsilon(x - x_0)$$

avec $\varepsilon(y) \to 0$ lorsque $y \to 0$. Soit η donné par le lemme 7.3 (voir plus bas) pour ε. La fonction $\varphi(x) = u(x_0) + \langle p, x - x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle X(x-x_0), X - x_0\rangle + |x-x_0|^2\eta(x-x_0)$ est régulière hors de x_0, inférieure à u dans un voisinage de x_0 et égale à u en x_0 : $u - \varphi$ a donc un minimum local en x_0. De plus,

$$\begin{aligned}
\nabla\varphi(x) &= p + X(x-x_0) + 2|x-x_0|\eta(x-x_0)(x-x_0) + |x-x_0|^2\nabla\eta(x-x_0) \\
D^2\varphi(x) &= X + 2\frac{(x-x_0)(x-x_0)^T}{|x-x_0|}\eta(x-x_0) \\
&\quad +2|x-x_0|\eta(x-x_0)I + 2|x-x_0|\nabla\eta(x-x_0)(x-x_0)^T + |x-x_0|^2 D^2\eta(x-x_0)
\end{aligned}$$

donc, par les propriétés de η, $\nabla\varphi$ et $D^2\varphi$ ont des limites, respectivement p et X, lorsque $x \to x_0$. Cela prouve que φ est C^2 et conclut la preuve de $(i) \Leftrightarrow (ii)$.
Démontrons maintenant qu'on peut passer d'un minimum (local ou global) à un minimum strict.
Si $u - \varphi$ atteint un minimum en x_0, alors $u - (\varphi - |\cdot - x_0|^4)$ atteint un minimum strict en ce même x_0 : on a en effet $u(x_0) - (\varphi(x_0) - |x_0 - x_0|^4) = u(x_0) - \varphi(x_0) \le u(x) - \varphi(x) \le u(x) - (\varphi(x) - |x - x_0|^4)$ avec une égalité entre les termes extrèmes qui entraine l'égalité dans la dernière majoration, c'est-à-dire $|x - x_0|^4 = 0$, donc $x = x_0$. On conclut en constatant que la fonction $\psi = \varphi - |\cdot - x_0|^4$ est de classe C^2 et a mêmes dérivées premières et secondes en x_0 que φ.
Montrons maintenant que l'on peut toujours prendre des fonctions-test telles que l'on ait un minimum global.
Soit φ telle que $u - \varphi$ a un minimum local (disons sur une boule centrée en x_0 et de rayon $r < 1$) en x_0 ; quitte à ajouter une constante à φ (ce qui ne change pas ses dérivées premières et secondes), on peut supposer que $u(x_0) - \varphi(x_0) = 0$.
Prenons une suite $(K_n)_{n\ge 0}$ de compacts de Ω qui vérifient : $K_0 = \overline{B}(x_0, r)$, $K_n \cap K_m \neq \emptyset$ uniquement lorsque $|n-m| \le 1$, $K_n \cap B(x_0, r/2) = \emptyset$ lorsque $n \ge 1$, K_n est inclus dans l'intérieur de $K_{n-1} \cup K_n \cup K_{n+1}$ ($K_0 \cup K_1$ lorsque $n = 0$) et l'union des K_n est Ω ; on prend par exemple, pour $n \ge 1$,

$$\begin{aligned}
K_n &= \left(\left\{x \in \Omega \,\middle|\, |x - x_0| \le n \text{ et } \frac{1}{n} \le \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \le \frac{1}{n-1}\right\}\right. \\
&\quad \left.\cup \left\{x \in \Omega \,\middle|\, n - 1 \le |x - x_0| \le n \text{ et } \frac{1}{n} \le \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)\right\}\right) \backslash B(x_0, r/2).
\end{aligned}$$

Soit γ_n de classe C^∞ positive à support compact dans $K_{n-1} \cup K_n \cup K_{n+1}$ ($K_0 \cup K_1$ lorsque $n = 0$) et qui vaut 1 sur K_n ; on peut aussi se débrouiller pour que $\operatorname{supp}(\gamma_1)$ ne contienne pas x_0 (ce point est à l'extérieur de K_1).
Comme u est sci, pour tout $n \ge 0$, $\inf_{K_n}(u - \varphi)$ est fini ; posons $a_n = \inf(0, \inf_{K_n}(u - \varphi))$ (on a, par définition de K_0, $a_0 = 0$) et $\psi = \varphi + \sum_n a_n\gamma_n$. Par hypothèse sur les intersections des compacts K_n et les supports des fonctions γ_n, cette somme est localement finie et ψ est donc une fonction sur Ω qui a la même régularité que φ. Comme $a_0 = 0$, $\operatorname{supp}(\gamma_1)$ ne contient pas x_0 et $\operatorname{supp}(\gamma_n)$ ne rencontre pas $K_0 = \overline{B}(x_0, r)$ lorsque $n \ge 2$, les dérivées de ψ en x_0 coincident avec celles de φ. De plus, pour tout n, on a, sur K_n, $\psi \le \varphi + a_n$ donc $u - \psi \ge u - \varphi - a_n \ge 0$ et comme $u(x_0) - \psi(x_0) = u(x_0) - \varphi(x_0) = 0$, $u - \psi$ atteint bien un minimum global en x_0, ce qui conclut la preuve. ∎
Pour établir ces équivalences, nous avons eu besoin du lemme suivant.

Lemme 7.3 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^N$ contenant 0 et $\varepsilon : U \to \mathbb{R}$ localement bornée et qui tend vers 0 en 0. Alors il existe $\eta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ de classe C^∞ en dehors de 0 telle que $|\varepsilon| \le \eta$ au voisinage de 0 et, pour tout $\nu \in \mathbb{N}^N$, $|x|^{|\nu|}|\partial^\nu\eta(x)| \to 0$ lorsque $x \to 0$.*

Démonstration du lemme 7.3 :
La conclusion étant locale, on peut supposer (quitte à modifier ε en dehors d'une boule centrée en 0) que ε est définie et bornée sur $\mathbb{R}^N$.

On commence par radialiser le problème en posant, pour $t > 0$, $f(t) = \sup_{|x|\le t}|\varepsilon(x)|$; f est croissante et tend vers 0 en 0. On prend $\rho \in C_c^\infty(]0, 1[)$ positive d'intégrale 1, on pose $\rho_t(s) = \frac{1}{t}\rho(\frac{s}{t})$ et on définit

$$g(t) = f * \rho_t(t) = \int_0^\infty f(s)\rho_t(s-t)\,ds = \frac{1}{t}\int_0^\infty f(s)\rho\left(\frac{s-t}{t}\right)ds. \tag{7.1}$$

On voit que g est C^∞ sur $]0,\infty[$ (ρ est régulière et f est bornée). De plus, comme f est croissante,

$$g(t) = \frac{1}{t}\int_t^{2t} f(s)\rho\left(\frac{s-t}{t}\right)\,ds \geq \frac{1}{t}\int_t^{2t} f(t)\rho\left(\frac{s-t}{t}\right)\,ds = f(t) \tag{7.2}$$

(rappelons que ρ est d'intégrale 1). Par dérivation sous l'intégrale, on a

$$\frac{d^m}{dt^m}\int_0^\infty f(s)\rho\left(\frac{s-t}{t}\right)\,ds = \int_0^\infty f(s)\frac{d^m}{dt^m}\rho\left(\frac{s}{t}-1\right)\,ds \tag{7.3}$$

et la formule de Faa-di-bruno donne

$$\begin{aligned}\frac{d^m}{dt^m}\rho\left(\frac{s}{t}-1\right) \quad &= \sum_{k_1+2k_2+\cdot+mk_m=m}\frac{m!}{k_1!\cdots k_m!(1!)^{k_1}\cdots(m!)^{k_m}}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{s}{t}-1\right)\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{s}{t}-1\right)\right)^{k_m}\\ &\qquad\times\rho^{(k_1+\cdots+k_m)}\left(\frac{s}{t}-1\right).\end{aligned}$$

Or $\frac{d^l}{dt^l}(\frac{s}{t}-1)$ se comporte comme $\frac{s}{t^{l+1}}$ et $\rho^{(k_1+\cdots+k_m)}(\frac{s}{t}-1)\neq 0$ uniquement lorsque $s\in]t,2t[$, auquel cas $\frac{s}{t^{l+1}}$ est majoré par $\frac{2}{t^l}$; ainsi, $\frac{d^m}{dt^m}\rho(\frac{s}{t}-1)$ est majoré par une combinaison linéaire de termes de la forme $\frac{1}{t^{k_1+2k_2+\cdots+mk_m}}\mathbf{1}_{]t,2t[}(s)$ avec $k_1+2k_2+\cdots+mk_m=m$. Ainsi,

$$\left|\frac{d^m}{dt^m}\rho(\frac{s}{t}-1)\right| \leq \frac{C_m}{t^m}\mathbf{1}_{]t,2t[}(s). \tag{7.4}$$

(7.3) et la formule de Leibniz appliquée à (7.1) montrent que la m-ème dérivée de g est une combinaison linéaire de

$$\frac{1}{t^{l+1}}\int_0^\infty f(s)\frac{d^{m-l}}{dt^{m-l}}\rho\left(\frac{s}{t}-1\right)\,ds$$

pour $l\in[0,m]$. (7.4) permet de majorer chacun de ces termes par

$$\frac{C_m}{t^{m+1}}\int_0^\infty f(s)\mathbf{1}_{]t,2t[}(s)\,ds \leq \frac{C_m}{t^{m+1}}\int_0^\infty f(2t)\mathbf{1}_{]t,2t[}(s)\,ds = \frac{C_m}{t^m}f(2t)$$

grâce au caractère croissant de f. On constate donc que $t^m g^{(m)}(t)\to 0$ lorsque $t\to 0$ (puisque $f(t)\to 0$ lorsque $t\to 0$).

Revenons maintenant au problème qui nous intéresse. On pose $\eta(x)=g(|x|)$, fonction C^∞ hors de 0. Par (7.2) et la définition de f, on a $\eta(x)\geq f(|x|)\geq|\varepsilon(x)|$ pour tout x. De plus, par la formule de Faa-di-bruno ou une récurrence, on voit que $\partial^\nu\eta$ est une combinaison linéaire de termes de la forme

$$\frac{x_{i_1}\cdots x_{i_l}}{|x|^k}g^{(r)}(|x|)$$

avec $k-l=|\nu|-r$. Ainsi, $|x|^{|\nu|}|\partial^\nu\eta(x)|$ est majoré par une combinaison linéaire de termes de la forme

$$|x|^{|\nu|-(k-l)}|g^{(r)}(|x|)| = |x|^r|g^{(r)}(|x|)|,$$

termes qui tendent bien vers 0 lorsque $x\to 0$. ■

7.2.2 Sous-différentiel d'une semi-limite relaxée et d'un supremum

Lemme 7.4 *Soit $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une famille localement bornée de fonctions scs et $\overline{u}=\limsup^* u^\varepsilon$. Alors, pour tout $(p,X)\in D^{2,+}\overline{u}(x)$, il existe $\varepsilon_n\to 0$, x_n et $(p_n,X_n)\in D^{2,+}u^{\varepsilon_n}(x_n)$ tels que*

$$(X_n,p_n,u^{\varepsilon_n}(x_n),x_n)\to(X,p,\overline{u}(x),x).$$

Démonstration du lemme 7.4 :
On se ramène au cas où $x=0$. Par définition, il existe $\varepsilon_n\to 0$ et $x_n\to 0$ tels que $u^{\varepsilon_n}(x_n)\to\overline{u}(0)$. De plus, pour tout $\delta>0$, il existe $r>0$ tels que, si $|y|\leq r$ alors $\overline{u}(y)\leq\overline{u}(0)+\langle p,y\rangle+\frac{1}{2}\langle Xy,y\rangle+\delta|y|^2$.

Comme u^{ε_n} est scs,

$$\sup_{y\in\overline{B}_r}\left\{u^{\varepsilon_n}(y)-\langle p,y\rangle-\frac{1}{2}\langle Xy,y\rangle-2\delta|y|^2\right\}$$

est fini et atteint, disons en $\overline{x}_n$. On a donc, dès que $x_n\in B_r$ (c'est vrai lorsque n est assez grand),

$$u^{\varepsilon_n}(x_n)\le u^{\varepsilon_n}(\overline{x}_n)+\langle p,x_n-\overline{x}_n\rangle+\frac{1}{2}\langle Xx_n,x_n\rangle-\frac{1}{2}\langle X\overline{x}_n,\overline{x}_n\rangle+2\delta(|x_n|^2-|\overline{x}_n|^2).$$

Quitte à extraire une suite, on peut supposer que $\overline{x}_n\to\overline{x}\in\overline{B}_r$. Puisque $x_n\to 0$ et par choix de x_n, on a alors

$$\begin{aligned}\overline{u}(0) &\le \liminf_{n\to\infty}u^{\varepsilon_n}(\overline{x}_n)-\langle p,\overline{x}\rangle-\frac{1}{2}\langle X\overline{x},\overline{x}\rangle-2\delta|\overline{x}|^2\\ &\le \limsup_{n\to\infty}u^{\varepsilon_n}(\overline{x}_n)-\langle p,\overline{x}\rangle-\frac{1}{2}\langle X\overline{x},\overline{x}\rangle-2\delta|\overline{x}|^2\\ &\le \overline{u}(\overline{x})-\langle p,\overline{x}\rangle-\frac{1}{2}\langle X\overline{x},\overline{x}\rangle-2\delta|\overline{x}|^2.\end{aligned}$$

Mais, par choix de r, on a $\overline{u}(\overline{x})-\langle p,\overline{x}\rangle-\frac{1}{2}\langle X\overline{x},\overline{x}\rangle\le\overline{u}(0)+\delta|\overline{x}|^2$, et on en déduit donc

$$\begin{aligned}\overline{u}(0) &\le \liminf_{n\to\infty}u^{\varepsilon_n}(\overline{x}_n)-\langle p,\overline{x}\rangle-\frac{1}{2}\langle X\overline{x},\overline{x}\rangle-2\delta|\overline{x}|^2\\ &\le \limsup_{n\to\infty}u^{\varepsilon_n}(\overline{x}_n)-\langle p,\overline{x}\rangle-\frac{1}{2}\langle X\overline{x},\overline{x}\rangle-2\delta|\overline{x}|^2\\ &\le \overline{u}(0)-\delta|\overline{x}|^2.\end{aligned}$$

Cela prouve d'une part que $\overline{x}=0$, donc que toute la suite $\overline{x}_n$ tend vers 0 (c'est sa seule valeur d'adhérence possible), et d'autre part que $\liminf_{n\to\infty}u^{\varepsilon_n}(\overline{x}_n)=\limsup_{n\to\infty}u^{\varepsilon_n}(\overline{x}_n)=\overline{u}(0)$, autrement dit que $u^{\varepsilon_n}(\overline{x}_n)\to\overline{u}(0)$.
Qui plus est, $\overline{x}_n$ est dans B_r pour n assez grand donc, par définition de $\overline{x}_n$, la fonction $u^{\varepsilon_n}-\varphi$ (où $\varphi(y)=\langle p,y\rangle+\frac{1}{2}\langle Xy,y\rangle+2\delta|y|^2$) atteint un maximum local en $\overline{x}_n$; donc $(\nabla\varphi(\overline{x}_n),D^2\varphi(\overline{x}_n))\in D^{2,+}u^{\varepsilon_n}(\overline{x}_n)$, c'est-à-dire

$$(p+X\overline{x}_n+4\delta\overline{x}_n,X+4\delta I)\in D^{2,+}u^{\varepsilon_n}(\overline{x}_n).$$

Lorsque $n\to\infty$, on a $(p+X\overline{x}_n+4\delta\overline{x}_n,X+4\delta I)\to(p,X+4\delta I)$. Comme δ peut être choisi arbitrairement petit, cela conclut la preuve (on se fixe $\delta>0$, on fait la construction précédente puis on sélectionne un n tel que $\varepsilon_n<\delta$, $|\overline{x}_n|<\delta$, $|u^{\varepsilon_n}(\overline{x}_n)-\overline{u}(0)|<\delta$ et on constate que $(X+4\delta I,p+X\overline{x}_n+4\delta\overline{x}_n,u^{\varepsilon_n}(\overline{x_n}),\overline{x}_n)$ est à distance $4\delta+(|X|\delta+4\delta^2)+\delta+\delta$ de $(X,p,\overline{u}(0),0)$, avec $(p+X\overline{x}_n+4\delta\overline{x}_n,X+4\delta I)\in D^{2,+}u^{\varepsilon_n}(\overline{x}_n)$).
■
Passons maintenant au supremum de fonctions scs, ou plus exactement à sa régularisation scs.

Lemme 7.5 *Soit $(u^\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille localement bornée supérieurement de fonctions scs et $\tilde{u}=(\sup_{\alpha\in A}u^\alpha)^*$. Alors, pour tout $(p,X)\in D^{2,+}\tilde{u}(x)$, il existe $\alpha_n\in A$, x_n et $(p_n,X_n)\in D^{2,+}u^{\alpha_n}(x_n)$ tels que*

$$(X_n,p_n,u^{\alpha_n}(x_n),x_n)\to(X,p,\tilde{u}(x),x).$$

Nous omettons la démonstration de ce lemme ; il suffit de reprendre la démonstration du lemme 7.4 et de passer non à la limite, mais au supremum.

7.2.3 Fonctions semi-convexes

Définition 7.2 *Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^N$. Une fonction $f:U\to\mathbb{R}$ est dite semi-convexe s'il existe $\lambda>0$ tel que $f+\frac{\lambda}{2}|\cdot|^2$ soit convexe sur U.*

En particulier, une fonction semi-convexe sera continue et même localement lipschitzienne. Nous allons voir dans ce qui suit que les fonctions semi-convexes sont encore bien plus “régulières”.

Définition 7.3 *Pour f continue on définit $\overline{D}^2 f(x) = D^{2,+}f(x) \cap D^{2,-}f(x)$. Un couple $(p, X) \in \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}_N$ est donc dans $\overline{D}^2 f(x)$ si et seulement si f admet le développement limité*

$$f(y) = f(x) + \langle p, y - x\rangle + \frac{1}{2}\langle X(y-x), y-x\rangle + o(|y-x|^2)$$

au voisinage de x.

Par le théorème de Rademacher, une fonction semi-convexe est presque partout différentiable (puisqu'elle est localement lipschitzienne). On dit parfois, dans la même veine, que les fonctions semi-convexes sont "presque partout deux fois différentiables" ; l'énoncé correct est le suivant.

Théorème 7.1 (Alexandroff) *Si f est semi-convexe sur U alors pour presque tout $x \in U$, on a $\overline{D}^2 f(x) \neq \emptyset$, i.e. pour presque tout $x \in U$ il existe $(p, X) \in \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}_N$ tels que*

$$f(y) = f(x) + \langle p, y - x\rangle + \frac{1}{2}\langle X(y-x), y-x\rangle + o(|y-x|^2)$$

dans un voisinage de x.

Comme une fonction semi-convexe est, à une fonction régulière près, convexe, il suffit en fait de prouver le théorème d'Alexandroff pour les fonctions convexes. L'idée de base, qui permet d'obtenir une "dérivée seconde ponctuelle" en plus de la dérivée première donnée par Rademacher, est de dire que la dérivée seconde au sens des distributions d'une fonction convexe est positive ; il s'agit donc d'une mesure (ou plutôt d'une matrice de mesures) dont on prend la partie absolument continue par rapport à Lebesgue, ce qui donne le X cherché. Nous ne ferons pas la démonstration et nous renvoyons à [7] pour les détails.

Voici un résultat technique que nous utiliserons en conjonction avec le théorème d'Alexandroff pour prouver le lemme d'Ishii.

Lemme 7.6 (Jensen) *Si $f : U \to \mathbb{R}$ est semi-convexe et $\overline{x}$ est un maximum local strict de f alors pour tous $r > 0$ et $\delta > 0$,*

$$\left\{x \in B(\overline{x}, r) \ : \ \exists p \in \mathbb{R}^N \ , \ |p| \leq \delta \ , \ \ x \textit{ est un maximum de } f + \langle p, \cdot\rangle \textit{ sur } \overline{B}(\overline{x}, r)\right\}$$

est de mesure non nulle.

Démonstration du lemme de Jensen :
Première étape : on suppose d'abord que $f \in C^2$. Soit r assez petit et tel que $\overline{x}$ soit maximum local strict de f sur $\overline{B}(\overline{x}, r)$. Pour δ assez petit et $|p| \leq \delta$, $f + \langle p, \cdot\rangle$ atteint son maximum sur $\overline{B}(\overline{x}, r)$ à l'intérieur de cette boule (car $f(\overline{x}) > \sup_{\partial B(\overline{x}, r)} f$ donc, pour p petit, $f(\overline{x}) + \langle p, \overline{x}\rangle > \sup_{\partial B(0,r)}(f + \langle p, \cdot\rangle)$).
Notons

$$A = \left\{x \in B(\overline{x}, r) \ : \ \exists p \in \mathbb{R}^N \ , \ |p| \leq \delta \ , \ \ x \text{ est un maximum de } f + \langle p, \cdot\rangle \text{ sur } \overline{B}(\overline{x}, r)\right\}. \tag{7.5}$$

Si $p \in B(0, \delta)$, on vient de voir qu'il existe $x \in B(\overline{x}, r)$ maximum de $f + \langle p, \cdot\rangle$ sur $\overline{B}(\overline{x}, r)$. En particulier, $x \in A$ et, le maximum étant réalisé à l'intérieur de la boule, on a $Df(x) + p = 0$; ceci étant vrai pour tout $p \in B(0, \delta)$, on obtient $B(0, \delta) \subset Df(A)$. De plus, pour tout $x \in A$, la condition d'optimalité à l'ordre 2 donne $D^2 f(x) \leq 0$; en notant $\lambda > 0$ tel que $f + \frac{\lambda}{2}|\cdot|^2$ soit convexe, on a aussi $D^2 f \geq -\lambda I$; ainsi, sur A, $-\lambda I \leq D^2 f \leq 0$ et en particulier $||D^2 f|| \leq \lambda$. f étant régulière, cette inégalité est encore valable sur $\overline{A}$ et le lemme 7.7 ci-desssous permet alors de voir que $|B(0, \delta)| \leq |Df(A)| \leq |Df(\overline{A})| \leq C(\lambda)|\overline{A}|$ où $C(\lambda)$ ne dépend que de λ ; on peut voir aisément que $\overline{A}\backslash A \subset \partial B(\overline{x}, r)$ (en fait, $\overline{A}$ est donné par (7.5) lorsque l'on remplace $B(\overline{x}, r)$ par $\overline{B}(\overline{x}, r)$) de sorte qu'on en déduit $|\overline{A}\backslash A| = 0$ et $|A| > |B(0, \delta)|/C(\lambda)$.

Deuxième étape : si f n'est pas régulière, on l'approche de manière uniforme sur $\overline{B}(\overline{x}, r)$ par des fonctions régulières f_n ; comme $f + \frac{\lambda}{2}|\cdot|^2$ est convexe, on peut se débrouiller pour que chaque $f_n + \frac{\lambda}{2}|\cdot|^2$ soit convexe (en fait, on approche $f + \frac{\lambda}{2}|\cdot|^2$ par des fonctions régulières convexes g_n et on pose $f_n = g_n - \frac{\lambda}{2}|\cdot|^2$).
En notant A_n l'ensemble défini par (7.5) avec f_n à la place de f et A celui correspondant à f, on a $A \supset \cap_{n \geq 1} \cup_{m \geq n} A_m$. En effet, si x est dans l'ensemble de droite, on peut trouver une suite $m(n) \geq n$ tel que $x \in A_{m(n)}$, *i.e.* telle qu'il existe p_n de norme inférieure à δ pour lequel $f_{m(n)} + \langle p_n, \cdot\rangle$ admette x

comme maximum sur $\overline{B}(\overline{x},r)$: pour tout $y \in \overline{B}(\overline{x},r)$, on a $f_{m(n)}(y)+\langle p_n,y\rangle \leq f_{m(n)}(x)+\langle p_n,x\rangle$. Quitte à extraire une suite, on peut supposer que p_n converge vers un p de norme inférieure à δ et en passant à la limite, on constate que x est un maximum de $f+\langle p,\cdot\rangle$ sur $\overline{B}(\overline{x},r)$, ce qui prouve que $x \in A$.
Si A était de mesure nulle alors, par continuité décroissante de la mesure, on aurait $|\cup_{m\geq n} A_m| \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Si on prend $\delta > 0$ tel que, pour tout p de norme inférieure à δ, on a $f(\overline{x})+\langle p,\overline{x}\rangle > \sup_{\partial B(\overline{x},r)}(f+\langle p,\cdot\rangle)$ alors il est assez aisé de voir que, pour n assez grand et $|p|\leq\delta$, $f_n+\langle p,\cdot\rangle$ atteint son maximum sur $\overline{B}(\overline{x},r)$ à l'intérieur de cette boule ; le raisonnement de la première étape est donc encore valable (bien que $\overline{x}$ ne soit pas forcément un maximum strict de f_n) et $|A_n| \geq |B(0,\delta)|/C(\lambda)$ (rappelons que chaque $f_n+\frac{\lambda}{2}|\cdot|^2$ est convexe, avec λ indépendant de n) et donc $|\cup_{m\geq n} A_m| \geq |B(0,\delta)|/C(\lambda)$, ce qui donne la contradiction recherchée. ∎

Lemme 7.7 *Si $F:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ de classe C^1 et vérifie $||DF|| \leq \lambda$ sur un compact K (la norme est matricielle) alors $|F(K)| \leq 6^N\lambda^N|K|$.*

Remarque 7.1 *On peut en fait faire beaucoup mieux : on peut prouver que $|F(K)| \leq \int_K |\det(DF)|$; mais cela demande des résultats de recouvrement beaucoup plus fins que ceux que nous employons ci-dessous (voir [7]).*

Démonstration du lemme 7.7 :
Pour tout $x \in K$, comme $||DF(x)|| \leq \lambda$, on a $|F(y)-F(x)| \leq \lambda|x-y|+o(|y-x|)$. Soit $\delta > 0$: il existe $r_x < \delta$ tel que, pour tout $y \in B(x,r_x)$, $|F(y)-F(x)| \leq 2\lambda|x-y| \leq 2\lambda r_x$; cela signifie que $F(B(x,r_x)) \subset \overline{B}(F(x),2\lambda r_x)$.
Comme K est compact, on peut le recouvrir par un nombre fini de $B(x,r_x/3)$, disons $K \subset \cup_{i=1}^l B(x_i,r_i/3)$. Il est alors possible d'extraire de ce recouvrement une famille $(B(x_j,r_j/3))_{j\in J}$ de boules deux à deux disjointes telles que $K \subset \cup_{j\in J}B(x_j,r_j)$ (on commence par prendre la boule $B(x_j,r_j/3)$ de plus grand rayon puis on supprime toutes les boules qui l'intersectent : comme $r_j/3$ est le plus grand des $r_i/3$, la boule $B(x_j,r_j)$ recouvre toutes les boules ainsi supprimées ; on recommence ensuite avec la boule ayant le plus grand rayon parmi celles restantes, etc...). On a alors $F(K) \subset \cup_{j\in J}F(B(x_j,r_j)) \subset \cup_{j\in J}\overline{B}(F(x_j),2\lambda r_j)$. Ainsi,

$$|F(K)| \leq \sum_{j\in J} 2^N\lambda^N r_j^N|B(0,1)| \leq 2^N\lambda^N\sum_{j\in J}3^N|B(x_j,r_j/3)| \leq 6^N\lambda^N|\cup_{j\in J} B(x_j,r_j/3)|$$

puisque $(B(x_j,r_j/3))_{j\in J}$ sont deux à deux disjointes. Mais $\cup_{j\in J}B(x_j,r_j/3) \subset K+B(0,\delta/3)$ par choix des r_j donc

$$|F(K)| \leq 6^N\lambda^N|K+B(0,\delta/3)|.$$

Ceci étant vrai pour tout $\delta > 0$ et, K étant compact, $|K+B(0,\delta/3)|$ tendant vers $|K|$ lorsque $\delta \to 0$, on en déduit le lemme. ∎

7.2.4 Régularisation par sup-convolution

La régularisation de fonction scs par sup-convolution (respectivement de fonction sci par inf-convolution) est un point-clé de la démonstration du Lemme d'Ishii, et donc des démonstrations des principes de comparaison en solution de viscosité.

Définition 7.4 *Soit Ω un ouvert et $u:\Omega\to\mathbb{R}$ semi-continue supérieurement et bornée supérieurement. Soit $\varepsilon > 0$. La régularisée par sup-convolution de u, notée u^ε, est définie pour tout $x \in \Omega$ par :*

$$u^\varepsilon(x) = \sup_{y\in\Omega}\left\{u(y)-\frac{|x-y|^2}{2\varepsilon}\right\}.$$

De façon analogue, on peut définir la régularisée par inf-convolution d'une fonction semi-continue inférieurement et bornée inférieurement ; il suffit de poser $u_\varepsilon(x) = -(-u)^\varepsilon(x)$. Voici les principales propriétés de u^ε.

Proposition 7.2
i) La fonction u^ε est localement Lipschitz, semi-convexe et bornée supérieurement.
ii) $u^\varepsilon \geq u$.

iii) Pour tout $x \in \Omega$, $u^\varepsilon(x)$ décroit vers $u(x)$ quand $\varepsilon \to 0$ et si $u^\varepsilon(x) = u(x^\varepsilon) - \frac{1}{2\varepsilon}|x - x^\varepsilon|^2$, alors $|x - x^\varepsilon| = o(\sqrt{\varepsilon})$

iv) Si $u^\varepsilon(x) = u(x^\varepsilon) - \frac{1}{2\varepsilon}|x - x^\varepsilon|^2$ et $(p, A) \in D^{2,+}u^\varepsilon(x)$, alors $p = \frac{x^\varepsilon - x}{\varepsilon}$ et $(p, A) \in D^{2,+}u(x^\varepsilon)$.

Remarque 7.1 *1. On peut énoncer les propriétés correspondantes pour l'inf-convolution. En particulier u_ε est une fonction semi-concave localement Lipschitz.*

2. Une conséquence immédiate de iv) et du fait que la borne supérieure définissant $u^\varepsilon(x)$ est toujours atteinte est que si $(p, A) \in D^{2,+}u^\varepsilon(x)$, alors $(p, A) \in D^{2,+}u(x + \varepsilon p)$ et $u^\varepsilon(x) = u(x + \varepsilon p) - \frac{1}{2\varepsilon}|p|^2$. C'est cette conséquence que nous utiliserons dans la démonstration du Lemme d'Ishii.

Démonstration : Il est clair que u^ε est bornée supérieurement puisque u l'est. De plus, si l'on choisit $y = x$, on voit que $u^\varepsilon(x) \geq u(x)$. Pour montrer que u^ε est semi-convexe (précisément $u^\varepsilon + \frac{|\cdot|^2}{2\varepsilon}$ est convexe), il suffit de développer $|x - y|^2$:

$$u^\varepsilon(x) = \sup_{y \in \Omega} \left\{ u(y) - \frac{|y|^2}{2\varepsilon} + \frac{\langle x, y \rangle}{\varepsilon} \right\} - \frac{|x|^2}{2\varepsilon},$$

et $u^\varepsilon + \frac{|\cdot|^2}{2\varepsilon}$ est alors défini comme le supremum d'une famille de fonctions affines donc est convexe ; comme u^ε est semi-convexe, elle est en particulier localement Lipschitz.
Nous laissons le point iii) en exercice (la démonstration est identique à l'étude de la pénalisation dans la preuve du théorème 5.3), et il nous reste à montrer le point iv). Remarquons d'abord que pour $x \in \Omega$, le supremum définissant $u^\varepsilon(x)$ est toujours atteint car u est borné et donc le supremum est en fait calculé sur un compact. Le caractère scs permet de conclure.
Par définition des sur-différentiels d'ordre 2 et de u^ε, on a :

$$u(z) - \frac{|y - z|^2}{2\varepsilon} \leq u^\varepsilon(y) \leq u^\varepsilon(x) + \langle p, y - x \rangle + \frac{1}{2}\langle A(y - x), y - x \rangle + o(|y - x|^2). \tag{7.6}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}^N$. On choisit alors $z = x^\varepsilon$ et $y = x + \lambda d$ dans (7.6) et l'on trouve :

$$-\langle \frac{x - x^\varepsilon}{\varepsilon}, \lambda d \rangle + O(\lambda^2) = \frac{|x - x^\varepsilon|^2}{2\varepsilon} - \frac{|x - x^\varepsilon + \lambda d|^2}{2\varepsilon} \leq \langle p, \lambda d \rangle + O(\lambda^2).$$

En divisant par λ et en faisant tendre λ vers 0, on trouve alors :

$$\langle \frac{x^\varepsilon - x}{\varepsilon} - p, d \rangle \leq 0.$$

Comme d est arbitraire, on conclut que $p = \frac{x^\varepsilon - x}{\varepsilon}$. En choisissant maintenant $y = x + z - x^\varepsilon$ dans (7.6), on trouve exactement que $(p, A) \in D^{2,+}u(x^\varepsilon)$. ■

7.2.5 La démonstration du Lemme d'Ishii

Rappelons tout d'abord son énoncé :

Lemme 7.8 (Ishii) *Soit U et V ouverts de $\mathbb{R}^N$, $u : U \to \mathbb{R}$ scs et $v : V \to \mathbb{R}$ sci. Soit $\varphi : U \times V \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On suppose que $(x_1, x_2) \mapsto u(x_1) - v(x_2) - \varphi(x_1, x_2)$ a un maximum local en $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \in U \times V$ et on note $p_1 = D_{x_1}\varphi(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$, $p_2 = -D_{x_2}\varphi(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ et $A = D^2\varphi(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$. Alors, pour tout $\alpha > 0$ tel que $\alpha A < I$, il existe X et Y dans $\mathcal{S}_N$ tels que*

$$(p_1, X) \in \overline{D}^{2,+}u(\overline{x}_1), \quad (p_2, Y) \in \overline{D}^{2,-}v(\overline{x}_2),$$
$$-\frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq (I - \alpha A)^{-1}A.$$

La démonstration se fait en trois étapes. Dans la première, on réduit le problème à un problème plus simple. Dans la seconde étape, on régularise par sup-convolution le problème pour se ramener à des fonctions semi-convexes. Dans la troisième étape, on utilise l'artillerie liée aux sup-convolutions et aux fonctions semi-convexes (voir Sections 7.2.3 et 7.2.4) pour conclure.

Première étape. Posons $w(x_1, x_2) = u(x_1) - v(x_2)$. Nous savons que $w - \varphi$ atteint un maximum local en $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2) \in U \times V$. Nous allons montrer qu'il suffit de prouver le théorème pour $\varphi(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle$. Pour ce faire, on pose :

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x_1) &= u(\overline{x}_1 + x_1) - u(\overline{x}_1) - \langle p_1, x_1\rangle \\ \tilde{v}(x_2) &= v(\overline{x}_2 + x_2) - v(\overline{x}_2) - \langle p_2, x_2\rangle \\ \tilde{w}(x_1, x_2) &= \tilde{u}(x_1) - \tilde{v}(x_2).\end{aligned}$$

En faisant un développement limité d'ordre 2 de φ, on voit que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in B(0, r)$,

$$\tilde{w}(x) \leq \frac{1}{2}\langle (A + \varepsilon I)x, x\rangle.$$

Il suffit alors de prouver le théorème dans ce cas. En effet, si pour tout $\varepsilon > 0$ et tout α vérifiant $\alpha(A + \varepsilon I) < I$ on trouve $X_\varepsilon, Y_\varepsilon \in \mathcal{S}_N$ tels que

$$(0, X_\varepsilon) \in \overline{D}^{2,+}\tilde{u}(0)\,, \quad (0, Y_\varepsilon) \in \overline{D}^{2,-}\tilde{v}(0)\,,$$

et

$$-\frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X_\varepsilon & 0 \\ 0 & -Y_\varepsilon\end{pmatrix} \leq (I - \alpha(A + \varepsilon I))^{-1}(A + \varepsilon I)$$

alors pour $\alpha > 0$ tel que $\alpha A < I$, on a $\alpha(A + \varepsilon I) < I$ pour ε petit et il suffit ensuite d'extraire une sous-suite des matrices bornées $(X_\varepsilon, Y_\varepsilon)$ qui converge vers (X, Y) et de passer à la limite dans l'inégalité matricielle. On voit alors assez simplement que $(0, X) \in \overline{D}^{2,+}\tilde{u}(0)$ et $(0, Y) \in \overline{D}^{2,-}\tilde{v}(0)$, c'est-à-dire $(p_1, X) \in \overline{D}^{2,+}u(\overline{x}_1)$ et $(p_2, Y) \in \overline{D}^{2,-}v(\overline{x}_2)$.
Seconde étape. On peut désormais supposer que $w(0) = 0$ et que pour tout $x \in B(0, r)$,

$$w(x) \leq \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle.$$

Quitte à modifier et étendre w en dehors de $B(0, r)$, on peut aussi supposer que w est définie et scs sur $\mathbb{R}^N$ et que cette majoration est valable sur tout l'espace (on pose par exemple $w \equiv -\infty$ en dehors de $B(0, r)$).
Il suffit, pour α tel que $\alpha A < I$, de construire $X, Y \in S_N$ telles que $(0, X) \in \overline{D}^{2,+}u(0)$, $(0, Y) \in \overline{D}^{2,-}v(0)$ et

$$-\frac{1}{\alpha}I \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y\end{pmatrix} \leq (I - \alpha A)^{-1}A.$$

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$,

$$w(x) - \frac{1}{2\alpha}|x - y|^2 \leq \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \frac{1}{2\alpha}|x - y|^2.$$

En prenant le supremum suivant x, on obtient,

$$w^\alpha(y) \leq \frac{1}{2}\langle A^\alpha y, y\rangle$$

où $A^\alpha = (I - \alpha A)^{-1}A$ et où w^α est la régularisée par sup-convolution de la fonction w scs (voir Section 7.2.4). C'est une fonction semi-convexe : $W(\cdot) = w^\alpha(\cdot) + \frac{1}{2\alpha}|\cdot|^2$ est convexe. La dernière inégalité implique que $(0, A^\alpha) \in D^{2,+}w^\alpha(0)$.
Troisième étape. On a donc $(0, A^\alpha + \frac{1}{\alpha}I) \in D^{2,+}W(0)$. On va maintenant montrer successivement les trois lemmes suivants. On rappelle (voir Section 7.2.3) que $\overline{D}^2 f$ désigne $D^{2,+}f \cap D^{2,-}f$. Il est commode de noter $\tilde{D}^2 f(x) = \{\lim(p_n, C_n), (p_n, C_n) \in \overline{D}^2 f(x_n), (x_n, f(x_n)) \to (x, f(x))\} \subset \overline{D}^{2,+}f(x) \cap \overline{D}^{2,-}f(x)$.

Lemme 7.9 *Soit W une fonction convexe. Si $(p, B) \in D^{2,+}W(0)$ alors il existe une matrice C telle que $0 \leq C \leq B$ et que $(p, C) \in \tilde{D}^2 W(0)$.*

Lemme 7.10 *Les éléments de $\tilde{D}^2 w^\alpha(x_0, y_0)$ sont de la forme*

$$\left((p_1, p_2), \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y\end{pmatrix}\right)$$

avec $(p_1, X) \in \overline{D}^2 u^\alpha(x_0)$ et $(p_2, Y) \in \overline{D}^2(-v)^\alpha(y_0)$.

Lemme 7.11 *Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ scs. Alors*

$$(0, A) \in \overline{D}^{2,+} f^\alpha(0) \Rightarrow (0, A) \in \overline{D}^{2,+} f(0).$$

Supposons pour un instant ces lemmes prouvés. Le lemme 7.9 fournit une matrice C telle que $0 \le C \le A^\alpha + \frac{1}{\alpha} I$ et $(0, C) \in \tilde{D}^2 W(0)$. Ceci veut dire exactement $(0, C - \frac{1}{\alpha} I) \in \tilde{D}^2 w^\alpha(0)$ et $-\frac{1}{\alpha} I \le C - \frac{1}{\alpha} I \le A^\alpha$. On applique alors le lemme 7.10, puis deux fois le lemme 7.11. ■
Il nous reste à prouver les trois lemmes. Le premier est une conséquence du lemme de Jensen et du théorème d'Alexandroff.

Démonstration du lemme 7.9 : Dire que $(p, B) \in D^{2,+} W(0)$ revient à dire que la fonction semi-convexe $W(\cdot) - \langle p, \cdot \rangle - \frac{1}{2} \langle B \cdot, \cdot \rangle$ atteint un maximum local nul en 0. Fixons $\delta > 0$. Alors la fonction $W(\cdot) - \langle p, \cdot \rangle - \frac{1}{2} \langle B \cdot, \cdot \rangle - \delta |\cdot|^2$ atteint un maximum local strict en 0. Par le lemme de Jensen et le théorème d'Alexandroff, il existe q_δ et x_δ tels que $|q_\delta| + |x_\delta| < \delta$, $W(\cdot) - \langle p + q_\delta, \cdot \rangle - \frac{1}{2} \langle B \cdot, \cdot \rangle - \delta |\cdot|^2$ atteint un maximum local en x_δ et W a un développement de Taylor d'ordre 2 en x_δ. En notant (ζ_δ, C_δ) les termes d'ordre 1 et 2 de ce développement, ceci implique

$$\begin{aligned} &\zeta_\delta = p + q_\delta + B x_\delta + 2\delta x_\delta \\ &0 \le C_\delta \le B + 2\delta \end{aligned}$$

(on a utilisé la convexité de W pour : $0 \le C_\delta$). Il est alors clair que $\zeta_\delta \to p$ quand $\delta \to 0$ et comme $(C_\delta)_{\delta > 0}$ est borné, on peut extraire une sous-suite qui converge, disons vers C. Ceci achève la démonstration. ■

Démonstration du lemme 7.10 : Il suffit de montrer le résultat pour les éléments de $\overline{D}^2 w^\alpha$. Il est facile de voir que $w^\alpha(x_1, x_2) = u^\alpha(x_1) + (-v)^\alpha(x_2)$. Considérons alors

$$\left((p_1, p_2), \begin{pmatrix} X & C^T \\ C & Y \end{pmatrix} \right) \in \overline{D}^2 w^\alpha(x_0, y_0)$$

et montrons que C est nul. On exprime le fait que w^α a un développement de Taylor d'ordre 2 en 0 :

$$\begin{aligned} u^\alpha(x_0 + h_1) \quad &+ \quad (-v)^\alpha(y_0 + h_2) = u^\alpha(x_0) + (-v)^\alpha(y_0) \\ &+ \quad \langle p_1, h_1 \rangle + \langle p_2, h_2 \rangle + \frac{1}{2} \langle X h_1, h_1 \rangle + \frac{1}{2} \langle Y h_1, h_1 \rangle + \langle C h_1, h_2 \rangle + o(|h_1|^2 + |h_2|^2). \end{aligned}$$

En faisant successivement $h_1 = 0$ puis $h_2 = 0$ dans l'égalité précédente on voit que $(p_1, X) \in \overline{D}^2 u^\alpha(x_0)$ et que $(p_2, Y) \in \overline{D}^2 (-v)^\alpha(y_0)$; en retranchant les égalités obtenues, on obtient :

$$\langle C h_1, h_2 \rangle = o(|h_1|^2 + |h_2|^2)$$

donc pour tout $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^N$ fixés, $\lambda^2 \langle C d_1, d_2 \rangle = o(\lambda^2)$ i.e. $\langle C d_1, d_2 \rangle = 0$. Ainsi $C = 0$. ■

Démonstration du lemme 7.11 : Soit $(0, A) \in \overline{D}^{2,+} f^\alpha(0)$. Par définition du sous-différentiel limite, il existe un triplet (x_n, p_n, A_n) tels que $(x_n, f^\alpha(x_n), p_n, A_n) \to (0, f^\alpha(0), 0, A)$ et $(p_n, A_n) \in D^{2,+} f^\alpha(x_n)$. On sait que (voir section 7.2.4) $(p_n, A_n) \in D^{2,+} f(x_n + \alpha p_n)$ et $f^\alpha(x_n) = f(x_n + \alpha p_n) - \frac{\alpha}{2} |p_n|^2$. Donc $f(x_n + \alpha p_n)$ a une limite, qui est $f^\alpha(0)$. Or $f^\alpha(0) \ge f(0)$ et f est scs. Donc $f^\alpha(0) = f(0)$ et on conclut. ■

7.2.6 Commentaires et bibliographie

Les résultats de cette section sur le calcul sous-différentiel sont très classiques mais les détails sont rarement écrits. Certains se trouvent dans [18] et [15]. Les démonstrations des lemmes de Jensen et d'Ishii sont tirées de [18] (nous avons seulement complété la démonstration du Lemme de Jensen).

Bibliographie

[1] Bénilan P., communication privée.

[2] Bénilan P., Boccardo, Gallouët T., Gariepy, Vasquez, Pierre M., *An L^1-Theory of Existence and Uniqueness of Solutions of Nonlinear Elliptic Equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Sci. Fis. Mat., IV, **22**, 2, 1995.

[3] Boccardo L., Gallouët T. *Nonlinear elliptic equations with right-hand side measures,* Comm. Partial Differential Equations, **17** (1992), 641-655.

[4] Boccardo L., Gallouët T., Murat F., *Unicité de la solution de certaines équations elliptiques non linéaires*, C.R. Acad. Sci. Paris, **315**, 1992, pp 1159-1164.

[5] Bardos C., Leroux A-Y., Nedelec J-C., *First order quasilinear equations with boundary conditions*, Comm. Partial Differential Equations, 4 (1979), pp. 1017–1034.

[6] J. Droniou, T. Gallouët et J. Vovelle, *Global solution and smoothing effect for a non-local regularization of an hyperbolic equation*, Journal of Evolution Equations, Vol **3**, No 3 (2003), pp. 499-521.

[7] Evans L.C., Gariepy R.F., "Measure Theory and Fine Properties of Functions", CRC PRESS, 1992.

[8] Krushkov S.N., *First Order quasilinear equations with several space variables.* Math. USSR. Sb., **10** (1970), 217-243.

[9] Kuznecov N. N., *The accuracy of certain approximate methods for the computation of weak solutions of a first order quasilinear equation*, Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz., **16** (1976), pp. 1489–1502, 1627.

[10] Prignet A., *Remarks on existence and uniqueness of solutions of elliptic problems with right-hand side measures.* Rend. Mat. Appl. (7) **15** (1995), no. 3, pp. 321-337.

[11] Serre D., *Systèmes de Lois de Conservation I.* Diderot Ed., 1996.

[12] Serrin J., *Pathological solutions of elliptic differential equations.* Ann. Scuola Norm. Pisa, (1964), 385-387.

[13] Stampacchia G., *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **15** (1965), 189-258.

[14] Bardi, Martino and Capuzzo-Dolcetta, Italo, *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*, Birkhäuser Boston Inc., 1997, xviii+570.

[15] Barles, Guy, *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, Springer-Verlag, (1994), x+194.

[16] Chen, Yun Gang and Giga, Yoshikazu and Goto, Shun'ichi, *Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations*, Journal of Differential Geometry, **33**, (1991), No 3, 749–786.

[17] Crandall, Michael G. and Lions, Pierre-Louis, *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc., **277**, (1983), No 1, 1–42.

[18] Crandall, Michael G. and Ishii, Hitoshi and Lions, Pierre-Louis, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), **27**, (1992), No 1, 1–67.

[19] Evans, L. C. and Spruck, J., *Motion of level sets by mean curvature. I*, J. Differential Geom., **33**, (1991), No 3, 635–681.

[20] FLEMING, WENDELL H. AND SONER, H. METE, *Controlled Markov processes and viscosity solutions*,Applications of Mathematics, **25**, Springer-Verlag, New York, (1993), xvi+428

[21] ISHII, HITOSHI, *Perron's method for Hamilton-Jacobi equations*, Duke Mathematical Journal, **55**, (1987), No 2, 369–384,

[22] ISHII, H. AND LIONS, P.-L., *Viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations*, J. Differential Equations,**83**, (1990), No 1, 26–78,

[23] LIONS, PIERRE-LOUIS, *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Research Notes in Mathematics, **69**,Pitman (Advanced Publishing Program), (1982), iv+317

[24] BARLES, G. AND SONER, H. M. AND SOUGANIDIS, P. E., *Front propagation and phase field theory*, SIAM J. Control Optim., **(**31), (1993), No 2,439–469,

[25] SOUGANIDIS, PANAGIOTIS E., *Front propagation : theory and applications*, dans "Viscosity solutions and applications" (Montecatini Terme, 1995), Lecture Notes in Math., Springer, **1660**, (1997), 186–242,

[26] BARLES, G. AND PERTHAME, B., *Discontinuous solutions of deterministic optimal stopping time problems*, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér., **21**, (1987), No 4, 557–579.

[27] BARLES, G. AND PERTHAME, B., *Comparison principle for Dirichlet-type Hamilton-Jacobi equations and singular perturbations of degenerated elliptic equations*, Appl. Math. Optim., **21**, (1990), No 1, 21–44.

[28] JENSEN, R., *Uniqueness of Lipschitz extensions : minimizing the sup norm of the gradient*, Arch. Rat. Mech. Anal., **123**, (1993), 51–74.